

Geometria delle sezioni coniche

Teorie classiche. Tratto da: "Theatrum Machinarum"

Le coniche, ottenute come sezioni piane di un cono, sono studiate inizialmente nello spazio in quanto curve "solide". I "sintomi" (proprietà) che le caratterizzano legano i loro singoli punti al cono di appartenenza.

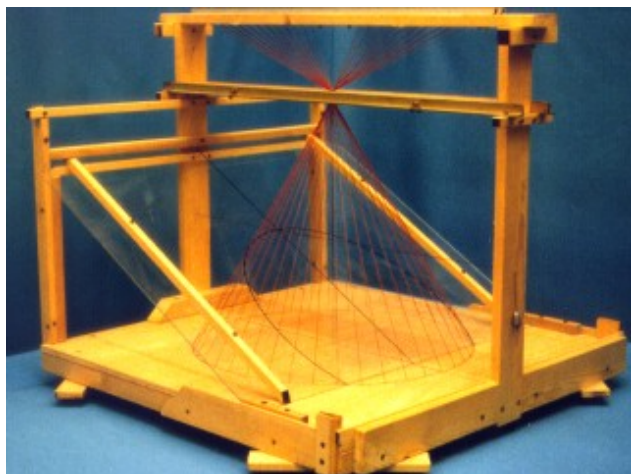
Un primo gruppo di modelli illustra la teoria classiche delle coniche sviluppate dal matematico greco **Menecmo** nella seconda metà del IV secolo a.C. che le chiamò: *ortotome*, *oxitome*, *amblitome*. Un secondo modello fu successivamente proposto da **Apollonio** da Perga (260 – 200 a.C.); la sua opera "*Sezioni coniche*", è un capolavoro di rigore logico e può essere messa sullo stesso piano degli "*Elementi*" di Euclide. L'opera originaria era composta di 8 libri. Il libro VIII è andato perduto, i libri V, VI e VII ci sono pervenuti solo nella traduzione araba e sono i più innovativi di tutta l'opera. E' da Apollonio che le sezioni coniche hanno preso i nomi moderni di *parabola*, *ellisse* ed *iperbole*. Questi modelli differiscono per due motivi:

- 1) Menecmo usa solo coni retti (rettangoli, acutangoli, ottusangoli) ottenuti per rotazione di opportuni triangoli rettangoli attorno a un cateto, e li taglia tutti con piani perpendicolari al lato obliquo del triangolo assiale (l'ipotenusa) sicchè le diverse coniche giacciono su diversi tipi di cono.
- 2) Apollonio invece usa un cono generico (obliquo, con base circolare) e tagliandolo con piani diversamente inclinati riesce a collocare su di esso tutte le curve scoperte da Menecmo. Le differenti proprietà che le caratterizzano sono (sia dall'uno che dall'altro studioso) ricavati sul cono, nello spazio tridimensionale (e ciò qualifica tali curve come "solide"): ma Apollonio le reinterpreta anche nel piano introducendo così i termini ancora oggi in uso di ellisse, parabola, iperbole.

Nel trattato di Apollonio (l'unico parzialmente pervenutoci) la "natura" delle coniche è poi indagata a fondo: con deduzioni svolte in prevalenza sul piano, usando in modo abile e rigoroso la teoria delle proporzioni, si ricavano a partire dalla definizione, numerose altre proprietà. Il linguaggio usato ci rende difficile la lettura: siamo abituati alle abbreviazioni dell'algebra, troviamo fastidiosa la scansione euclidea della prova (enunciazione, rappresentazione, preparazione, dimostrazione, generalizzazione), nozioni per noi ovvie non lo erano affatto allora. Ad esempio: non c'era alcuna consapevolezza del fatto che le tre coniche sono modalità diverse di un unico ente matematico; i due rami dell'iperbole non erano percepiti inizialmente come un'unica curva; occorre prescindere da ogni nozione e/o deduzione fondata sui concetti di proiezione e di simmetria, ecc. Notiamo che i modelli di questo gruppo sono statici: ma noi (guidati da una secolare esperienza) possiamo facilmente trasformarli, per

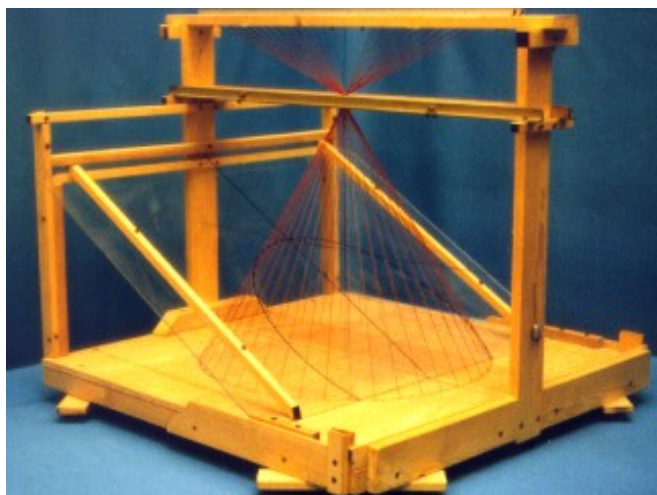
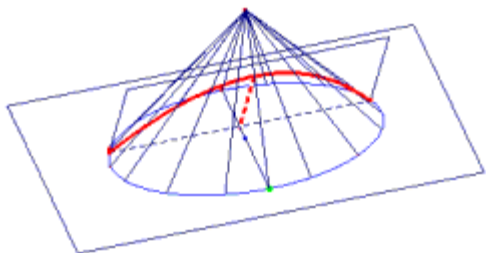
completare le dimostrazioni, in "macchine mentali" alzando o abbassando il piano di base.

Sezioni coniche di Menecmo



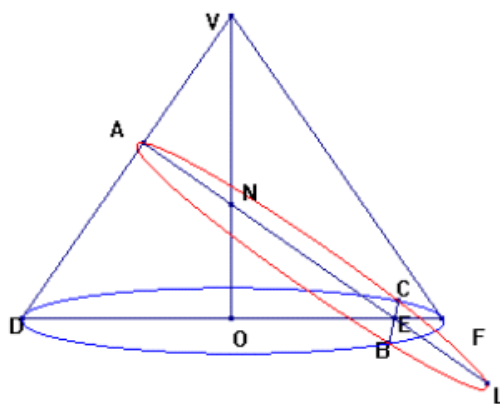
ORTOTOME

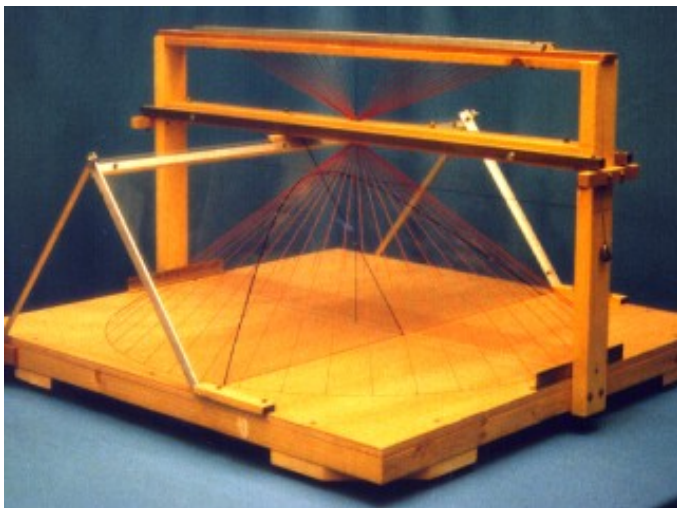
Nella teoria di Menecmo vengono usati solo coni retti (generati dalla rotazione attorno ad un cateto di un triangolo rettangolo) e la tecnica di esecuzione della sezione è sempre la stessa: piano perpendicolare al lato obliquo del triangolo per l'asse. Al variare del triangolo per l'asse (cioè del cono utilizzato) si ottengono le tre diverse sezioni. Se il triangolo rettangolo per l'asse è *isoscele*, si ottiene l'*ortotome* (parabola).



OXITOME

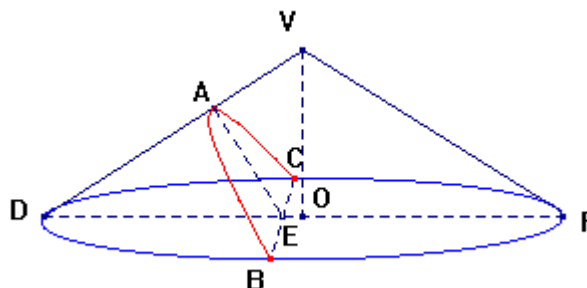
Se il triangolo rettangolo per l'asse è *acutangolo*, si ottiene l'*oxitome* (ellisse).





AMBLITOME

Se il triangolo rettangolo per l'asse è **ottusangolo**, si ottiene l'**amblitome** (iperbole).

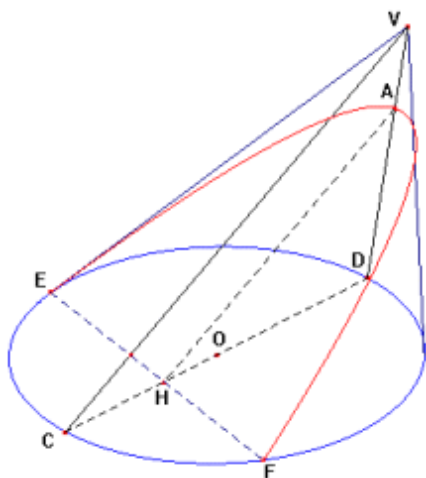


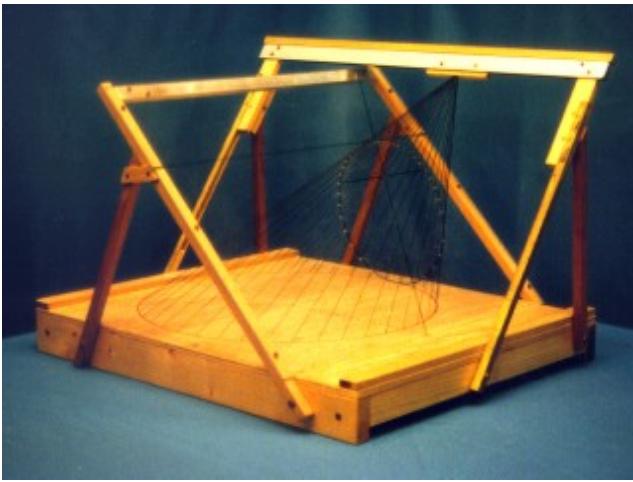
Sezioni coniche di Apollonio



PARABOLA

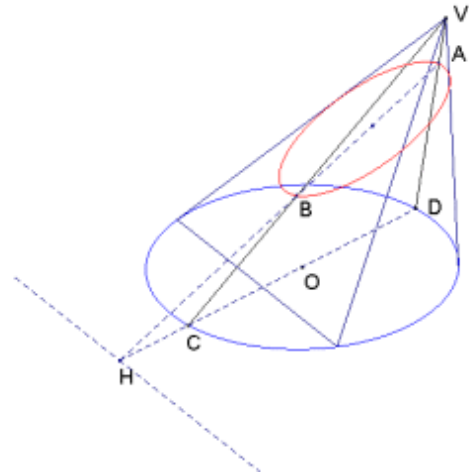
Nella teoria di Apollonio vengono usati coni qualsiasi. Dato un cono obliquo a base circolare, il piano secante ed il piano di base del cono si intersecano lungo una retta perpendicolare alla base del triangolo per l'asse (unico vincolo). Se il piano secante è parallelo al lato VC del triangolo per l'asse, si ottiene la **parabola**.





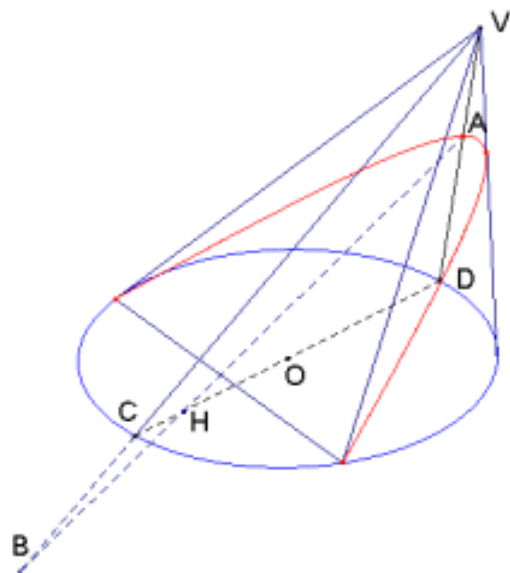
ELLISSE

Se il piano secante interseca entrambi i lati del triangolo per l'asse non coincidenti con la sua base, si ottiene l'**ellisse**.



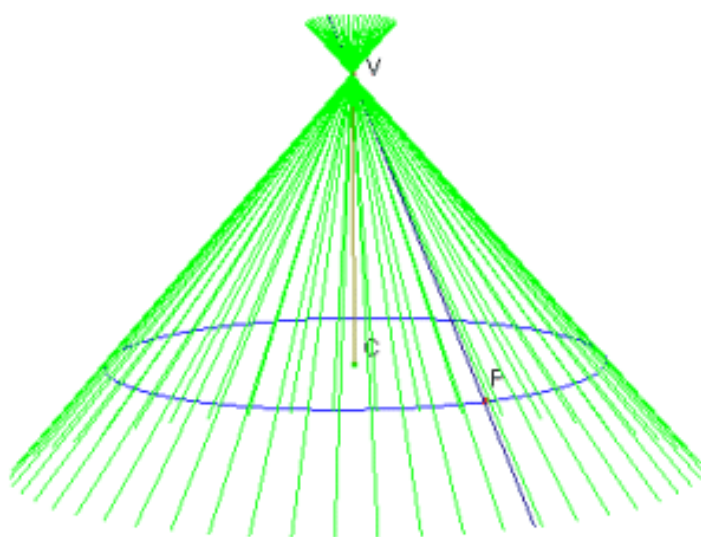
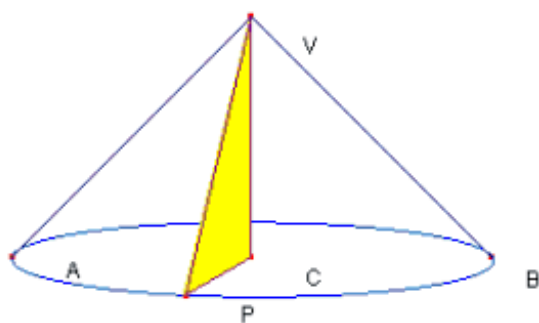
IPERBOLE

Se il piano secante interseca un lato del triangolo per l'asse e il prolungamento dell'altro, si ottiene l'**iperbole**.

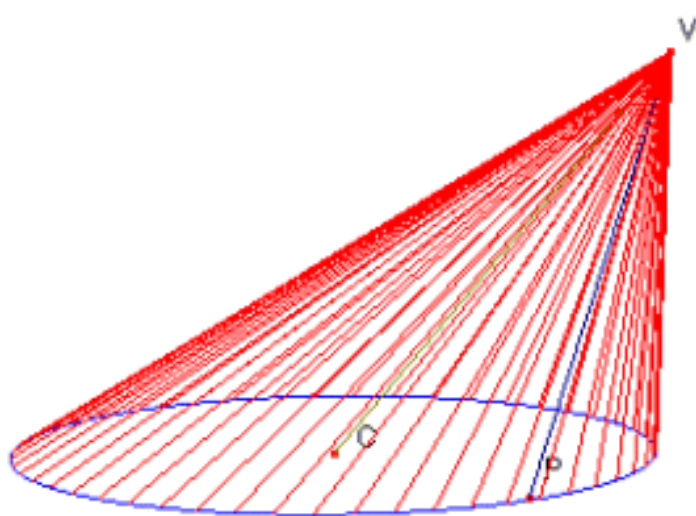


CONO RETTO

Quando un triangolo rettangolo ruota intorno ad un cateto fissato fino a ritornare alla posizione da cui era partito, la figura così racchiusa è un **CONO RETTO**.



In alternativa, un **CONO RETTO** è la figura delimitata dal cerchio e dalla superficie conica situata tra il **VERTICE V**, che giace sull'asse perpendicolare alla base, e la circonferenza del cerchio.

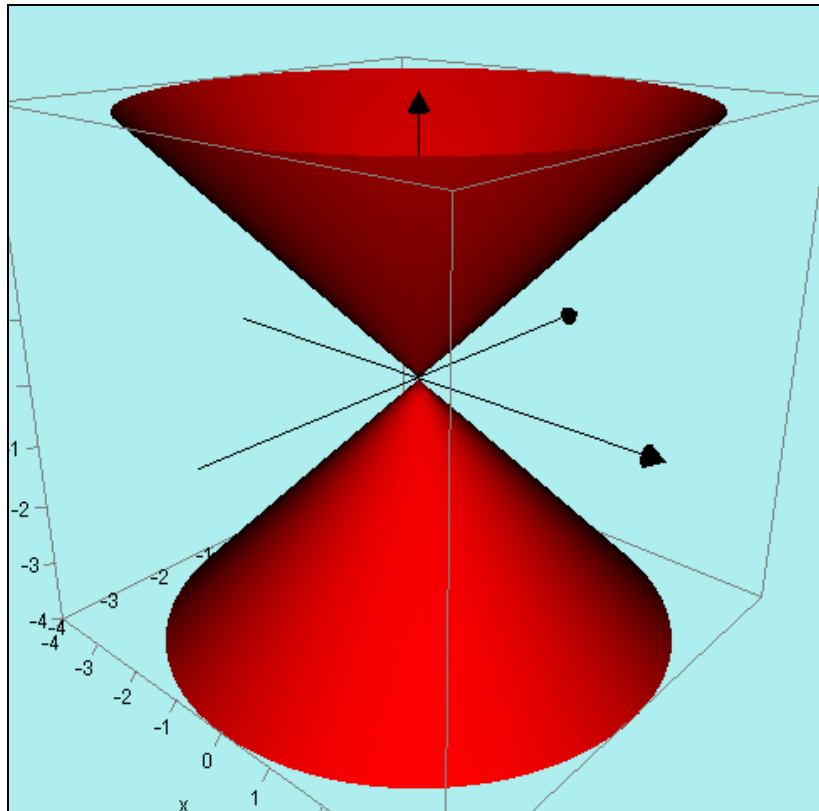


CONO QUALSIASI

Chiamo **CONO** la figura delimitata dal cerchio e dalla superficie conica situata tra il **VERTICE V** e la circonferenza del cerchio; **ASSE** del cono la retta tracciata dal vertice al centro del cerchio; e **BASE** il cerchio.

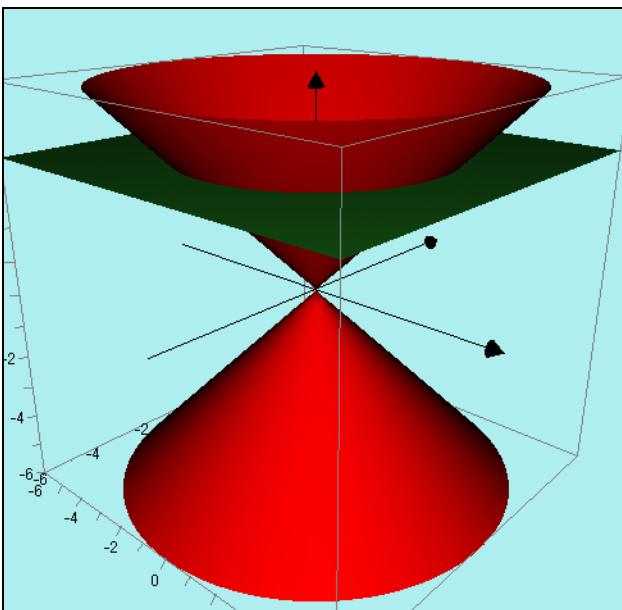
SEZIONI CONICHE

Immagini tratte da Autograph 3

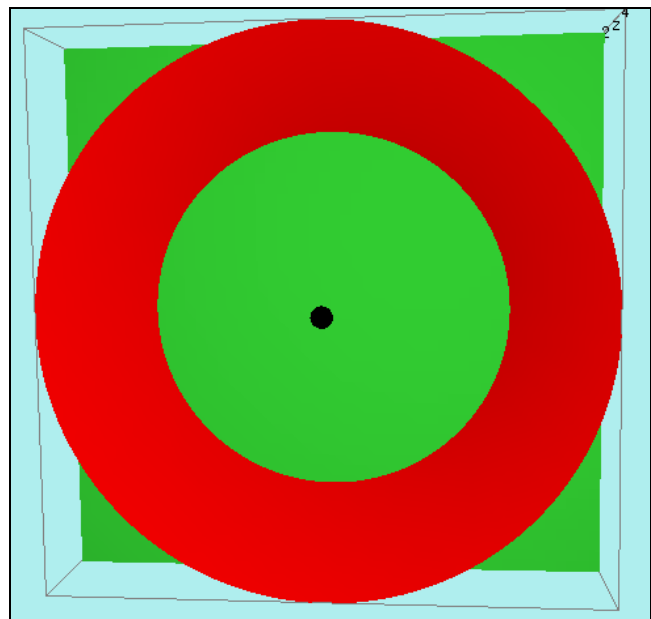


Cono retto a 2 falde

CIRCONFERENZA

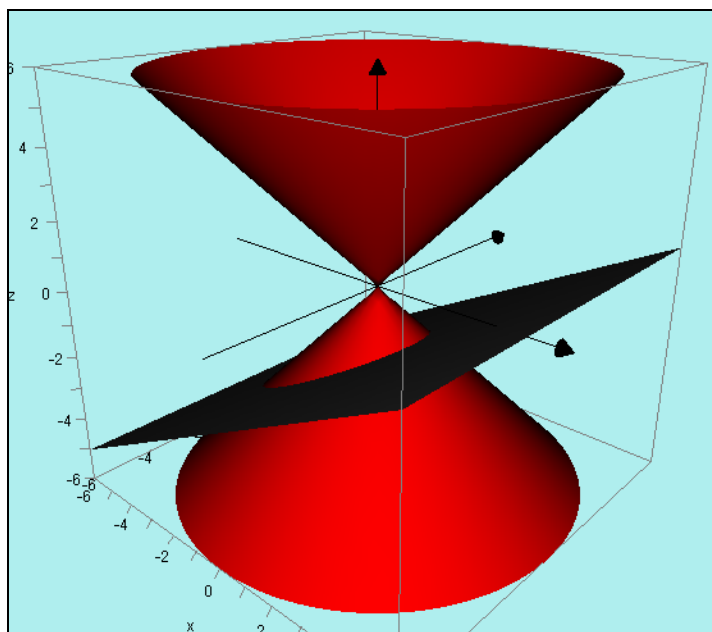


Taglio del cono con un piano orizzontale

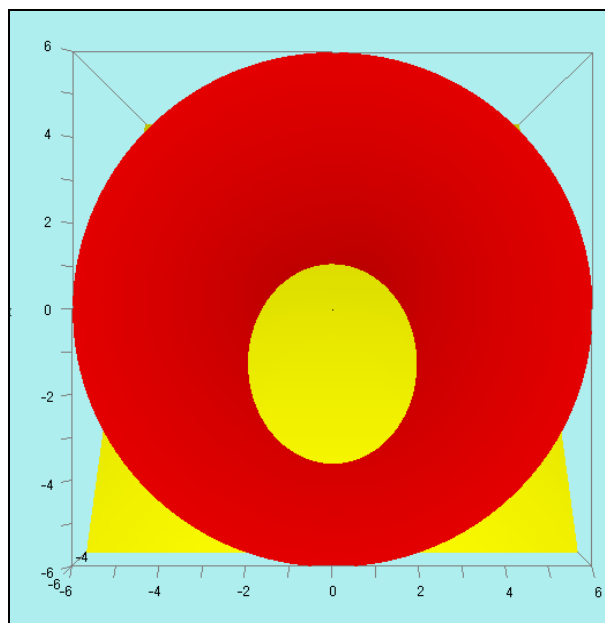


Visione dall'alto del cono precedente

ELLISSE

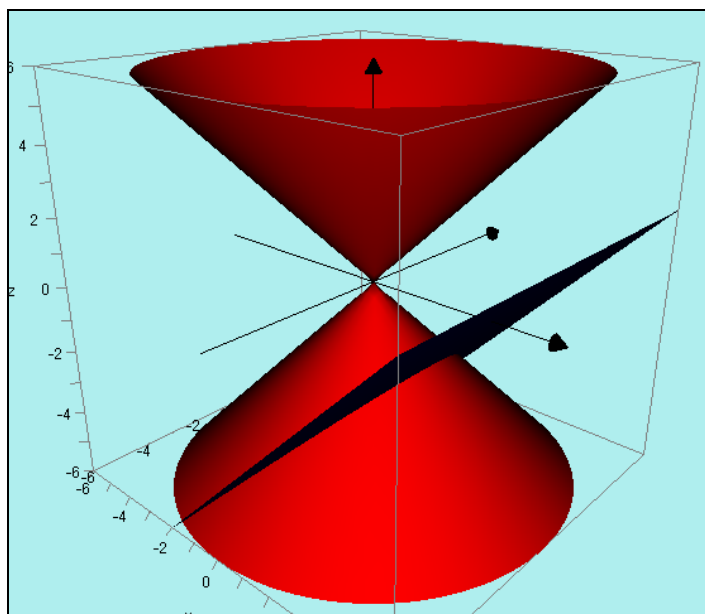


Piano obliquo che interseca tutte le generatrici

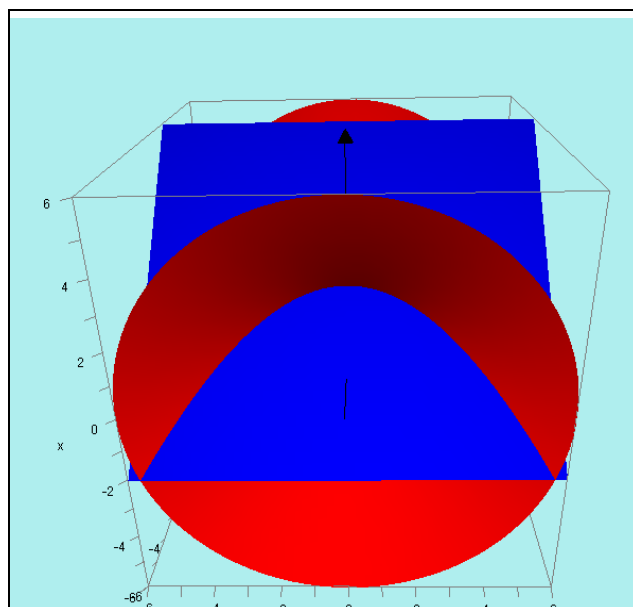


Visione dal basso del cono precedente

PARABOLA

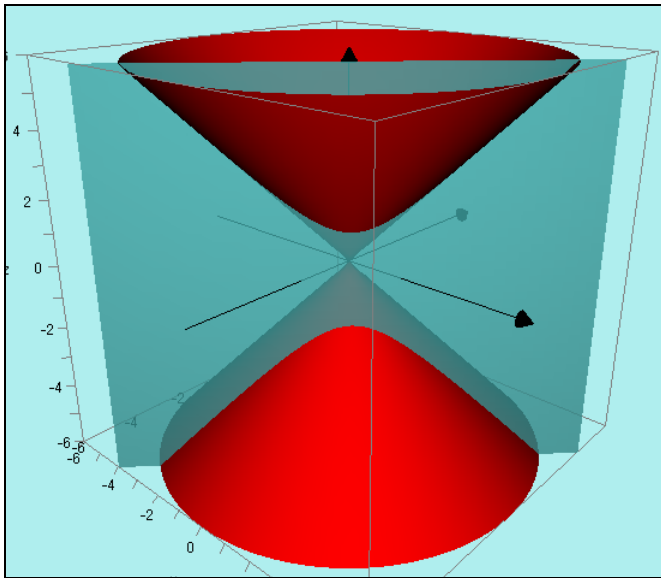


Piano obliquo che interseca tutte le generatrici tranne una.

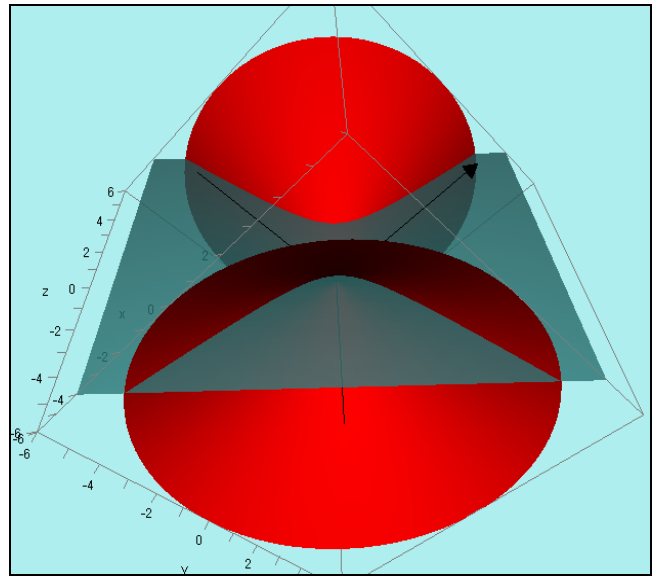


Visione dal basso del cono precedente

IPERBOLE



Piano verticale che interseca tutte le generatrici



Visione dal basso del cono precedente

Ortottiche di una circonferenza, di una ellisse e di una parabola.

Definiamo ORTOTTICA di una curva il luogo geometrico dei punti del piano che “vedono” la curva sotto un angolo di 90° . Ossia: tracciando da un punto qualsiasi dell’ortottica le rette tangenti alla curva, esse devono formare un angolo retto. Cominciamo a dimostrare la seguente:

Teorema. L’ortottica di una circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r è la circonferenza di centro C e raggio $R = \sqrt{2} r$.

Dim. Sia $\gamma: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ la circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r e sia $P(a, b)$ un punto esterno ad essa. Il fascio proprio di rette di centro P è:
 $y - b = m(x - a)$. Una retta del fascio è tangente alla circonferenza γ se la sua distanza dal centro C è r . Allora si ha:

$$\frac{|m(x_0 - a) - y_0 + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

risolvendo in funzione di m si ottiene l’equazione:

$$m^2[(a - x_0)^2 - r^2] - 2m(a - x_0)(b - y_0) + (b - y_0)^2 - r^2 = 0$$

Ora, se le due rette tangenti devono essere perpendicolari $\Rightarrow m_1 m_2 = -1$. Ma in una equazione di 2° grado, il prodotto delle soluzioni è il coefficiente c/a e quindi poniamo:

$$\frac{(b - y_0)^2 - r^2}{[(a - x_0)^2 - r^2]} = -1$$

da cui si deduce:

$$\boxed{(a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 = 2r^2} \quad (1.1)$$

che è l’equazione di una circonferenza con lo stesso centro C e raggio $R = \sqrt{2} r$.

Teorema. L’ortottica di una parabola è la sua direttrice.

Dim. Sia $\gamma: y = ax^2$ una parabola con il vertice nell’origine e direttrice: $y = -1/4a$. Dal punto $P(x_0, y_0)$ tracciamo le due rette tangenti alla parabola.

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema per sostituzione si ottiene l’equazione di 2° grado in m :

$$m^2 - 4amx_0 + 4ay_0 = 0$$

Affinché le rette siano perpendicolari si deve avere $m_1 m_2 = -1 = c/a \Rightarrow 4ay_0 = -1$, da cui

$$\boxed{y_0 = -\frac{1}{4a}} \quad (1.2)$$

che è l’equazione della direttrice.

Teorema. L'ortottica di una ellisse di centro $C(0, 0)$ e semiassi a e b è la circonferenza di centro C e raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dim. Sia $\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'ellisse di centro $C(0, 0)$ semiassi a e b e sia $P(x_0, y_0)$ un punto esterno ad essa. Le tangenti all'ellisse tracciate da P , si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Dopo lunghi calcoli si trova:

$$\Delta = m^2(x_0^2 - a^2) - 2mx_0y_0 + y_0^2 - b^2 = 0$$

Affinché le rette siano perpendicolari si deve avere $m_1 m_2 = -1 = c/a \Rightarrow \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1$, da cui si ottiene subito:

$$\boxed{x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2} \quad (1.3)$$

Teorema. L'ortottica di una iperbole di centro $C(0, 0)$ e semiassi a e b è la circonferenza di centro C e raggio $R = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Dim. Sia $\gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'ellisse di centro $C(0, 0)$ semiassi a e b e sia $P(x_0, y_0)$ un punto esterno ad essa. Le tangenti all'ellisse tracciate da P , si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Dopo lunghi calcoli si trova:

$$\Delta = m^2(x_0^2 - a^2) - 2mx_0y_0 + y_0^2 + b^2 = 0$$

Affinché le rette siano perpendicolari si deve avere $m_1 m_2 = -1 = c/a \Rightarrow \frac{y_0^2 + b^2}{x_0^2 - a^2} = -1$, da cui:

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2 \quad (1.4)$$

E' chiaro che questa ortottica esiste se $a \geq b$ ossia se gli asintoti formano un angolo $< 45^\circ$.

Parabola

Teorema: I raggi provenienti dall'infinito e paralleli all'asse di simmetria di una parabola, vengono riflessi nel suo fuoco.

Dimostrazione.

A tale scopo, ricordiamo che un raggio di luce obbedisce alla prima legge della riflessione la quale afferma che l'angolo fra il raggio incidente e la normale al piano di riflessione è uguale all'angolo formato dal raggio riflesso sempre con la normale al piano di riflessione. Ciò significa che la perpendicolare al piano di riflessione è la bisettrice dell'angolo formato fra il raggio incidente e quello riflesso.

Per semplicità consideriamo una parabola con l'asse di simmetria verticale, con il vertice nell'origine e con $a=1$. Per essa si avrà: $y = x^2$ $V(0,0)$ $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Consideriamo un generico raggio verticale di equazione $x=k$ che incontra la parabola nel punto $P(k, k^2)$.

La dimostrazione si articolerà nel modo seguente:

- 1) si determina l'equazione della retta FP;
- 2) si determina la retta n perpendicolare alla parabola nel punto P;
- 3) si determina la bisettrice b dell'angolo formato dalle rette FP e dal raggio verticale;
- 4) si verifica che $n=b$;
- 5) si conclude che FP è il raggio riflesso che dunque passa per il fuoco F.

1) Avendo i due punti F e P si ottiene dopo facili calcoli:

$$FP: (1 - 4k^2)x + 4ky - k = 0 \quad (1.5)$$

2) Per quanto riguarda la normale n , prima determiniamo la tangente alla parabola nel

punto P e poi la sua normale. Dal sistema:
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - k^2 = m(x - k) \\ \Delta = 0 \end{cases}$$
 si ottiene la retta tangente:

$t: y = 2kx - k^2$ e quindi la retta normale alla parabola nel punto P:

$$n: \frac{1}{2k}x + y - \frac{1}{2} - k^2 = 0 \quad (1.6)$$

3) Determiniamo ora la bisettrice b . Essa rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano equidistante dalle rette $x=k$ ed FP. Essa sarà quindi determinata dalla relazione:

$$\frac{(1 - 4k^2)x + 4ky - k}{\sqrt{(1 - 4k^2)^2 + 16k^2}} = \pm(x - k)$$
. Il segno + o - determina una delle due bisettrici. Quella

col segno - è quella di nostro interesse, quella col segno + infatti coincide con la stessa retta tangente t nel punto P già determinata in precedenza. Esplicitando tale relazione si ottiene infine:

$$b: \frac{1}{2k}x + y - \frac{1}{2} - k^2 = 0 \quad (1.7)$$

4) Verifichiamo facilmente che $n=b$;

5) Concludiamo quindi, che un qualunque raggio proveniente dall'infinito e parallelo all'asse di simmetria della parabola converge nel fuoco di questa conica. E' per questo motivo che assegniamo al punto F il nome di fuoco perché ivi convergono tutti i raggi, aumentando considerevolmente la **temperatura** di quel punto.

Formula di sdoppiamento

a) CIRCONFERENZA

Vogliamo dimostrare la seguente affermazione.

Data la circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ed un **suo** punto $P(x_0, y_0)$ allora la retta tangente alla circonferenza nel punto P è data da:

$$x_0x + y_0y + a\frac{x+x_0}{2} + b\frac{y+y_0}{2} + c = 0 \quad (1.8)$$

Dimostrazione.

Sia $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ il centro della circonferenza. La retta CP è, per un noto teorema della geometria euclidea, perpendicolare alla tangente nel punto P. Dunque se indichiamo con

$m_{CP} = \frac{y_0 + \frac{b}{2}}{x_0 + \frac{a}{2}}$ il coefficiente angolare della retta CP, quello della tangente t sarà:

$$m_t = -\frac{1}{m_{CP}} = -\frac{x_0 + \frac{a}{2}}{y_0 + \frac{b}{2}} = -\frac{2x_0 + a}{2y_0 + b} \quad (1.9)$$

La tangente in P ha dunque equazione:

$$y - y_0 = -\frac{2x_0 + a}{2y_0 + b}(x - x_0) \quad (1.10)$$

Moltiplicando e ordinando opportunamente i monomi si ottiene:

$$x_0x + y_0y + a\frac{x-x_0}{2} + b\frac{y-y_0}{2} - x_0^2 - y_0^2 = 0 \quad (1.11)$$

Ora dobbiamo imporre che $P \in \gamma$ e questo comporta: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$ ossia:

$$-x_0^2 - y_0^2 = ax_0 + by_0 + c \quad (1.12)$$

Sostituendo la (1.12) nella (1.11) si ottiene dopo facili calcoli:

$$\boxed{x_0x + y_0y + a\frac{x+x_0}{2} + b\frac{y+y_0}{2} + c = 0} \quad (1.13)$$

che è proprio la (1.8).

Es. la tangente t alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ nel **SUO** punto

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ è: } \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 = 0$$

b) PARABOLA

La **formula di sdoppiamento** si può applicare anche nel caso delle altre coniche in particolare vediamo ora il caso della parabola.

Data la parabola $y = ax^2 + bx + c$ ed un suo punto $P(x_0, y_0)$ allora la retta tangente alla parabola nel punto P è data da:

$$\frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c \quad (1.14)$$

Scritta in un'altra forma più opportuna:

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + y_0 \quad (1.15)$$

Dimostrazione.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \\ \Delta = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Per sostituzione otteniamo:

$$ax^2 + x(b - m) + c + mx_0 - y = 0$$

La condizione di tangenza implica $\Delta = 0$ che si traduce nella seguente:

$$m^2 - 2m(b + 2ax_0) + b^2 - 4ac + 4ay_0 = 0 \quad (1.17)$$

Imponiamo ora che il punto P appartenga alla parabola, ossia che le sue coordinate soddisfino l'equazione: $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ sostituendo nella (1.17) al posto di y_0 la sua espressione in funzione di x_0 . Si ha:

$$[m - (2ax_0 + b)]^2 = 0 \quad (1.18)$$

che fornisce l'unica soluzione per m :

$$m = 2ax_0 + b \quad (1.19)$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione della retta si ottiene la tangente:

$$\boxed{y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + y_0} \quad (1.20)$$

Per ottenere la retta nella forma (1.14) procediamo nel modo seguente: i) dividiamo per 2 il primo e secondo membro sviluppando le parentesi; ii) Aggiungiamo a entrambi i membri la quantità $x_0 + y_0/2$; iii) sostituiamo al posto di y_0 la sua espressione $ax_0^2 + bx_0 + c$. Si ottiene :

$$\boxed{\frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c} \quad (1.21)$$

che è la formula di sdoppiamento cercata.

La retta tangente in P fornita dalla (1.20) è molto comoda e facile da ricordare perché il coefficiente angolare della retta non è altro che la **DERIVATA** della parabola nel punto $P(x_0, y_0)$. Infatti si ha:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = y'(x_0) = 2ax_0 + b$$

Classificazione di una conica

Sia data una conica del tipo:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1.22)$$

Essa la si può classificare in questo modo.

1) Si considera il determinante della matrice A rappresentativa della conica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

ed il determinante della matrice ridotta \bar{A} :

$$|\bar{A}| = \begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4} = -\frac{\Delta}{4} \quad (1.24)$$

Si possono avere i seguenti casi:

$ A $	$\left\{ \begin{array}{l} \neq 0 \\ = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$	Conica non degenera $ \bar{A} $	$\left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$	Ellisse (anche immaginaria) Parabola Iperbole
		Conica degenera $ \bar{A} $	$\left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$	1 punto Coppia di rette // o coincidenti Coppia di rette incidenti

(1.25)

La conica degenera si dice di tipo ellittico se $|\bar{A}| > 0$ (1 punto), parabolico se $|\bar{A}| = 0$ (coppia di rette //) o iperbolico se $|\bar{A}| < 0$ (coppia di rette incidenti).

Per le coniche non degeneri e reali, si ha:

- i) $|\bar{A}| > 0 \Rightarrow$ l'ellisse è una sezione orizzontale di un paraboloide ellittico [fig. (1.33)].
- ii) $|\bar{A}| = 0 \Rightarrow$ parabola è una sezione orizzontale di un paraboloide parabolico [fig. (1.32)].
- iii) $|\bar{A}| < 0 \Rightarrow$ iperbole è una sezione orizzontale di un paraboloide iperbolico [fig. (1.31)].

In generale se nella (1.22) compare il termine "rettangolare" **bxy**, **la conica è ruotata**, mentre se compare almeno uno dei due termini di primo grado **dx** o **ey**, **la conica è traslata**.

Procedura generale

Una procedura generale per riportare in forma canonica una conica rototraslata, consiste nel sottoporre la (1.22) ad una rotazione di matrice ortogonale $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (1.26)$$

ed, imponendo che si annulli il coefficiente del termine $x'y'$, si trova l'angolo di rotazione α . Successivamente, si applica una generica traslazione di vettore $\vec{v} = (a, b)$:

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases} \quad (1.27)$$

ed, imponendo che si annullino i coefficienti dei termini di 1° grado in x' e y' , si trovano a e b .

A questo punto la conica è in forma canonica e può essere disegnata facilmente.

Per forma canonica di una conica si intendono le seguenti equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad x^2 + y^2 = r^2; \quad y = ax^2; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

per ellisse, circonferenza, parabola e iperbole.

Quanto descritto sopra, si può applicare a tutte le situazioni ma spesso risulta complicato dal punto di vista dei calcoli. Se ci troviamo di fronte ad una iperbole o ad una parabola (coniche che vanno all'infinito, curve aperte) è possibile semplificare il procedimento saltando la prima parte (quella più complessa); vediamo come.

Iperbole

a) Si divide la (1.22) per x^2 , si mandano x e y all'infinito, e si chiama il rapporto $\frac{y}{x} = m$,

coefficiente angolare delle direzioni all'infinito dell'iperbole. I termini di primo grado o inferiore tendono a 0 quando x e y tendono entrambi all'infinito e quindi rimane solo un'equazione di 2° grado in m . Risolvendola ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$) si ottengono i coefficienti angolari degli asintoti obliqui m_1 ed m_2 . Nel nostro esempio riportato nelle pagine successive abbiamo:

$$2m^2 - m - 1 = 0 \implies m_1 = 1 \quad m_2 = -\frac{1}{2}. \quad y = x + q_1 \quad y = -\frac{1}{2}x + q_2$$

b) Si applica la traslazione (1.27) e, come al solito, si impone l'annullamento dei termini di 1° grado in x' e y' trovando in questo modo a e b . Questi mi determinano il centro dell'iperbole la cui nuova equazione in x' e y' è ora simmetrica rispetto all'origine: $C(a, b)$. Gli asintoti avranno quindi equazione: $y - b = m_{1,2}(x - a)$.

c) Si determina un qualunque punto appartenente all'iperbole per capire in quale coppia di angoli opposti al vertice giacciono i due rami dell'iperbole.

d) I vertici si trovano intersecando la retta bisettrice dell'angolo formato dagli asintoti con l'iperbole. Ricordiamo che per trovare le bisettrici di un angolo formato da due rette bisogna

risolvere l'equazione: $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$ dove a,b,c e a',b',c' sono i coefficienti

delle due rette (nel nostro caso gli asintoti).

Conoscendo l'equazione degli asintoti ed i suoi vertici l'iperbole si può disegnare, magari ricercando anche le intersezioni con gli assi coordinati.

Parabola

a) Si divide la (1.22) per x^2 , si mandano x e y all'infinito, e si chiama il rapporto $\frac{y}{x} = m$,

coefficiente angolare della direzione all'infinito della parabola. Quando x e y tendono entrambi all'infinito rimane solo un'equazione di 2° grado in m. Risolvendola ($\Delta = 0$) si ottiene il coefficiente angolare dell'asse di simmetria della parabola. Nel nostro esempio

abbiamo: $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0 \implies m=2$. Equazione Asse: $y=2x+q$.

b) Per determinare il vertice della parabola si procede nel modo seguente:

1. si scrive l'equazione generica di una retta perpendicolare all'asse di simmetria;
2. Si impone che essa sia tangente alla parabola e si trova q ed il punto di tangenza

che ne costituisce il vertice. Nel nostro caso: $q = -\frac{349}{160}$.

Conoscendo l'equazione dell'asse della parabola ed il suo vertice la si può disegnare, magari ricercando anche le intersezioni con gli assi coordinati.

Utilizzo delle derivate

Per chi conosce il calcolo differenziale, è possibile un'ulteriore semplificazione dei calcoli. Osserviamo infatti che le nostre coniche sono sezioni orizzontali bidimensionali (cioè con $z=\text{cost.}$) di "coniche" (quadrice) tridimensionali. Allora possiamo ricercare i centri delle coniche determinando i centri delle "sorelle" in 3D. Per esse, possiamo applicare il teorema di Fermat che afferma che se una curva è derivabile e ha in un punto un massimo od un minimo relativo, allora la sua derivata in quel punto è nulla, cioè esso è un punto stazionario. Ciò è proprio quello che succede nel caso dell'ellisse (paraboloide ellittico), il cui centro si trova nel minimo della figura. Per l'iperbole (paraboloide iperbolico), il centro è un punto cosiddetto di sella (né di massimo né di minimo) per il quale però la derivata è sempre nulla. Essendo curve in due variabili ($z=f(x,y)$), utilizziamo le derivate parziali e

imponiamo che si annulli il gradiente della funzione: $\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$. Si ottiene un

sistema lineare di due equazioni in due incognite che risolto mi fornisce le coordinate del centro.

Per la parabola questo metodo non è applicabile perché il sistema è impossibile in quanto la parabola non ha un centro di simmetria, ma un asse di simmetria.

Nel nostro esempio si trova: iperbole: C(-1,-1); Ellisse: C(1,1).

Metodo matriciale.

Un metodo generale per riportare una conica ruotata rispetto ai propri assi in forma canonica eliminando in questo modo il termine misto bxy presente nella (1.22), consiste nel

diagonalizzare la matrice rappresentativa A in modo da ottenere una matrice diagonale del tipo: $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ che ha sulla diagonale gli **autovalori** della matrice. Gli autovalori si trovano risolvendo l'equazione vettoriale:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (1.28)$$

ossia $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ che fornisce un'equazione polinomiale caratteristica di 2° grado in λ . In corrispondenza dei due autovalori λ_1 e λ_2 , si determinano i due **autovettori ortonormali** \vec{v}_1 e \vec{v}_2 che costituiscono la nuova base rispetto alla quale la conica è in forma diagonale, ossia canonica. La matrice del cambiamento di base fra le vecchie coordinate e le nuove è la matrice ortogonale ($R^{-1} = R^T$):

$$R = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{2x} \\ v_{1y} & v_{2y} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

ossia si ha:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

R è quindi la matrice di rotazione che porta la conica (1.22) in forma canonica. E' quindi possibile leggere l'angolo di rotazione della conica rispetto alle vecchie coordinate dalle componenti della matrice R . Ad esempio: $v_{1x} = \cos \alpha$. Questo può essere utile per es. per determinare l'angolo formato dai semiassi di una ellisse ruotata.

Per concludere possiamo sottolineare che A e A' sono due matrici simili ossia per esse vale la relazione: $A' = R^{-1}AR$.

Paraboloido iperbolico

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 + 3x - 3y - 4$$

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 + 3x - 3y - 4$$

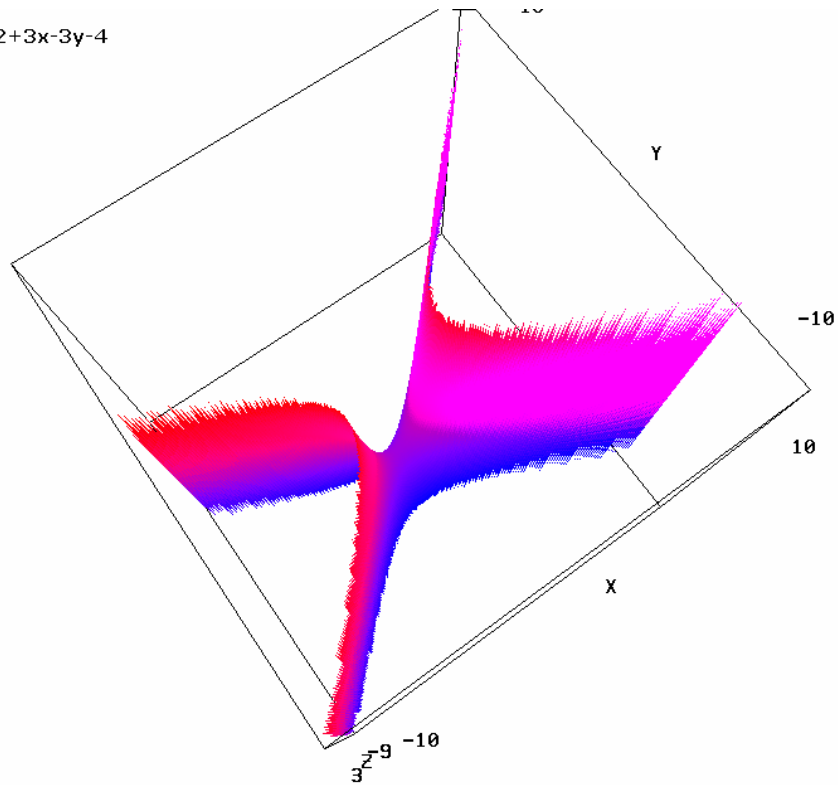
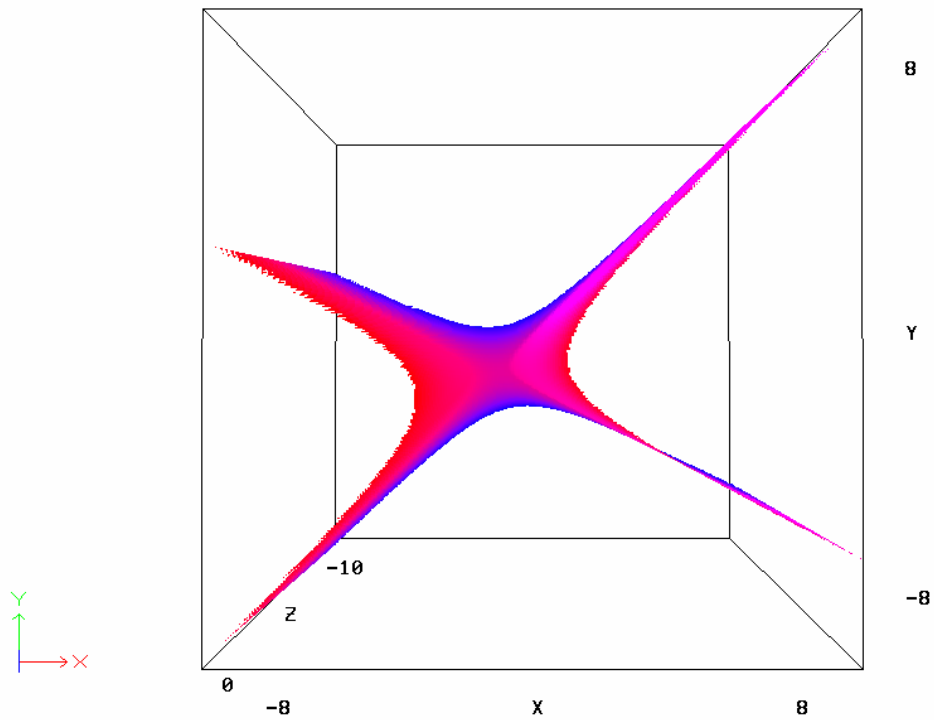


fig. (1.31)

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 + 3x - 3y - 4$$



Paraboloide parabolico

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 3y - 3$$

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 3y - 3$$

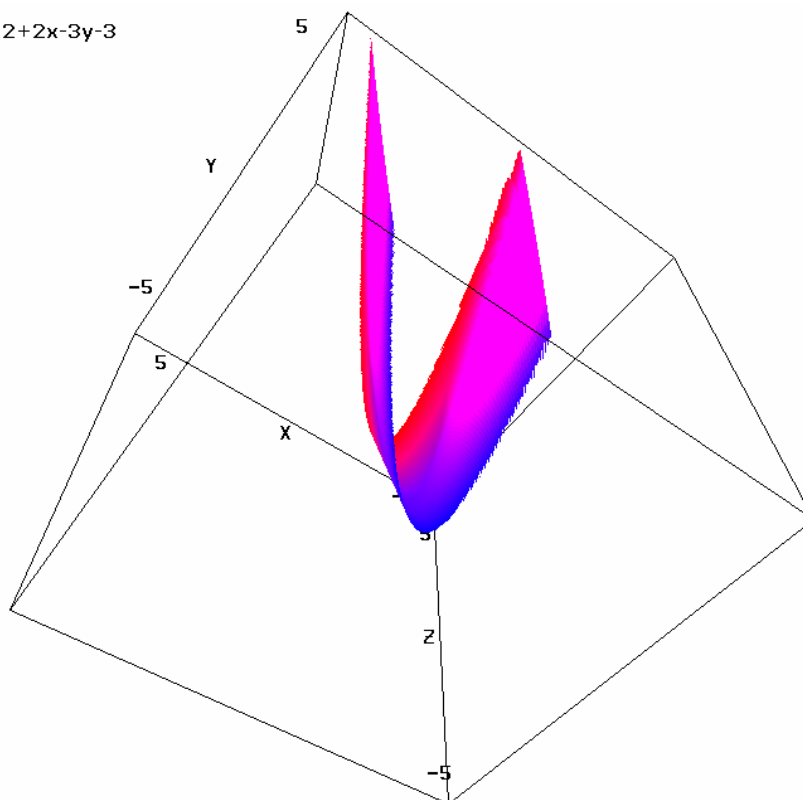
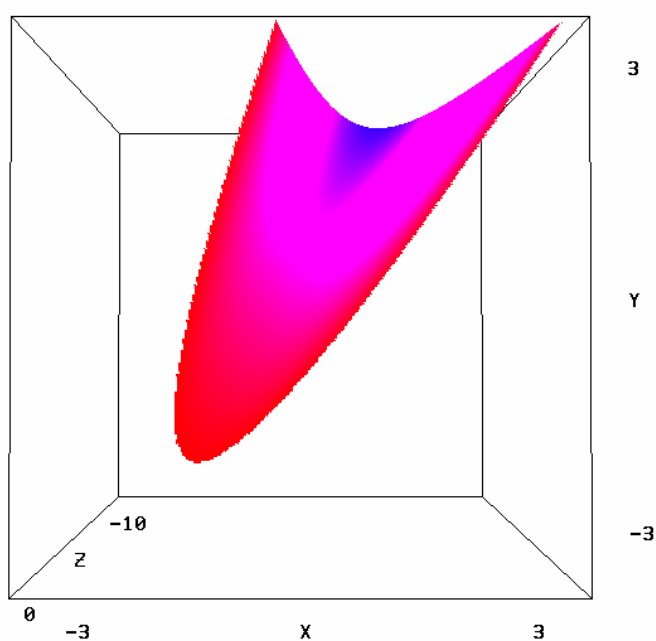


fig. (1.32)

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 3y - 3$$



Paraboloide ellittico

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3y^2 - 3x - 7y - 4$$

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3y^2 - 3x - 7y - 4$$

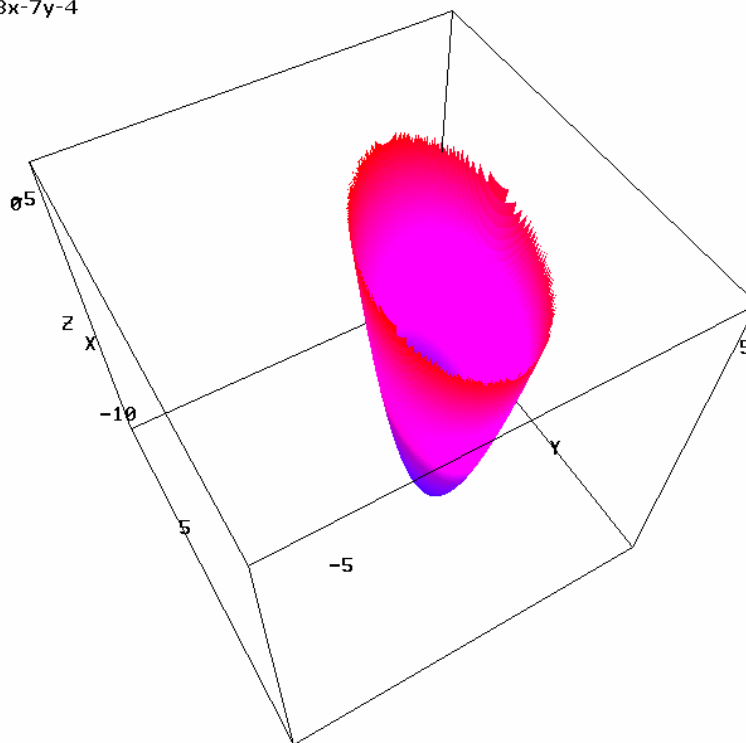


fig. (1.33)

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3y^2 - 3x - 7y - 4$$

