Dinamica

Prof. Roberto Fantini 2003
www.robertofantini.it

1) Esempio. Satellite che raccoglie polvere o palla di neve che rotola.

Consideriamo un satellite che raccoglie polvere interstellare ad un ritmo:

$\frac{dM}{dt} = \alpha v$ dove M e v sono la massa e la velocità del satellite ad un certo istante t. α è una costante positiva cosicché la massa del satellite aumenta.

Qual è la sua decelerazione?

Soluzione.

Dalla seconda legge di Newton si ha:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(Mv)}{dt} = \frac{dM}{dt}v + M\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (1.1)$$

poiché sul veicolo non agiscono forze esterne. Dunque la decelerazione del satellite, tenuto conto dell'ipotesi $\frac{dM}{dt} = \alpha v$, risulta essere:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha v^2}{M} \qquad (1.2)$$

L'equazione del moto può essere integrata analiticamente per separazione di variabili e fornisce il risultato:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{\alpha}{M}t \qquad (1.3)$$

che è una sorta di moto uniformemente accelerato per l'inverso della velocità. v_0 è la velocità all'istante t=0. Esplicitando la velocità si ottiene:

$$v = \frac{v_0 M}{M + \alpha v_0 t} \qquad (1.4)$$

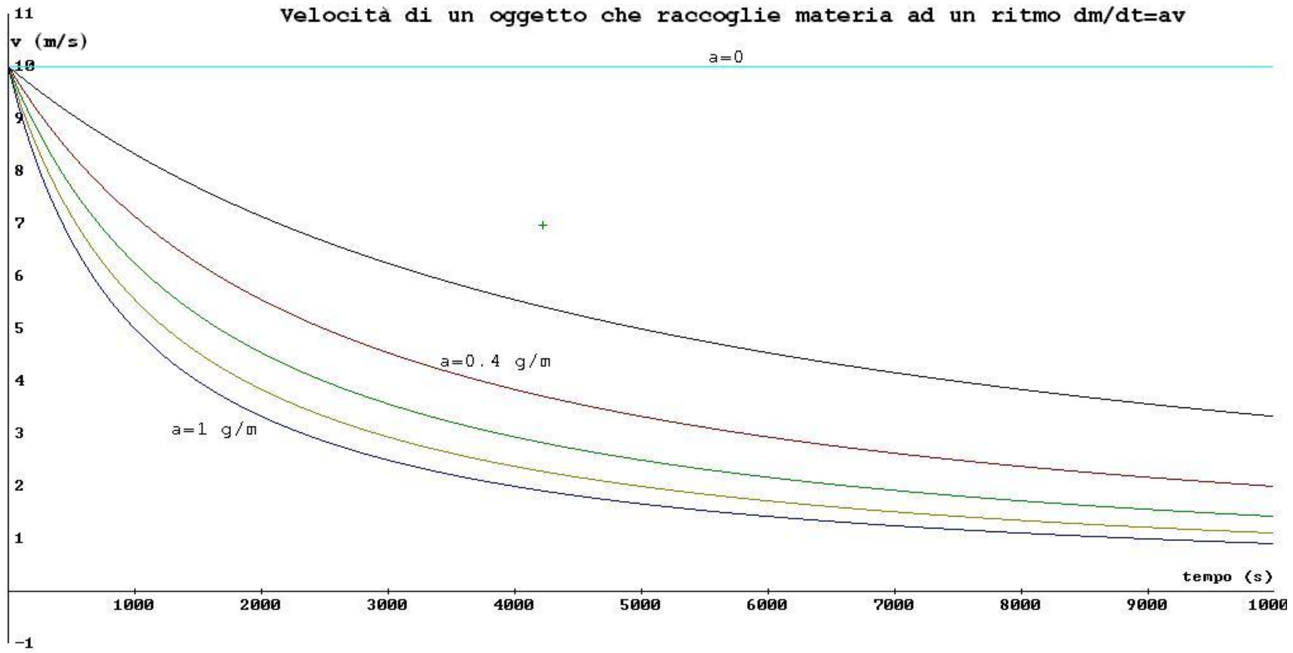


Fig. 1 Velocità di un oggetto che raccoglie massa ad un ritmo $\frac{dM}{dt} = \alpha v$ *per diversi valori di 0<=*α *<=1 g/m. I valori iniziali al tempo t=0 sono M=10 Kg e* v_0 *=10 m/s.*

E' interessante studiare l'andamento della posizione in funzione del tempo, ossia la legge oraria. Essa si ottiene integrando ulteriormente la (1.4) che fornisce:

$$x(t) = \frac{M}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{M} v_0 t\right) \tag{1.5}$$

Con le stesse condizioni al contorno della Fig. 1 otteniamo quindi un andamento logaritmico riportato nella figura sottostante.

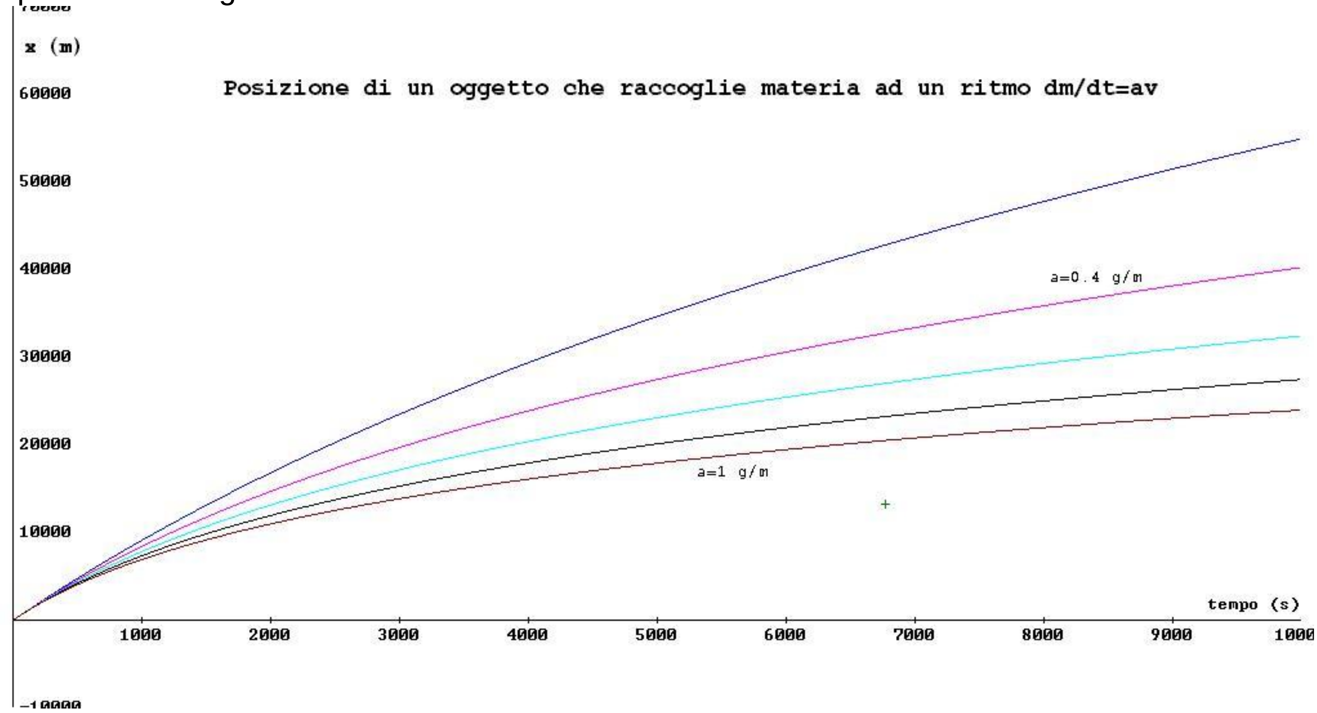


Fig. 2 Andamento logaritmico della posizione di un oggetto che raccoglie massa al ritmo $\frac{dM}{dt} = \alpha v$ *con 0.2<=*α *<=1 g/m. Per* α *=0 si ottiene la retta x(t)=v0 t.*

2) Esempio. Il moto di un razzo.

Un razzo espelle carburante a velocità $-V_0$ rispetto al razzo e la massa del veicolo varia al ritmo: $\dot{M} = \frac{dM}{dt} = -\alpha$. Scrivere e risolvere l'equazione del moto.

Soluzione.

Considerando il problema dal sistema di riferimento inerziale del laboratorio, la velocità del gas di scarico è $v - V_0$, con *v* velocità del veicolo rispetto al laboratorio all'istante generico *t*. La variazione della quantità di moto per unità di tempo del gas è: $|\dot{M}|(v - V_0) = \alpha(v - V_0)$. Per la conservazione della quantità di moto totale, questa variazione deve essere uguale e contraria a quella acquisita dal razzo, ossia: $\frac{dp}{dt} = \frac{dM}{dt} v + M \frac{dv}{dt} = \dot{M} v + M\dot{v}$. Si ottiene perciò:

$$\dot{M}v + M\dot{v} = -\alpha(v - V_0) \quad \Rightarrow \quad M\dot{v} = \alpha V_0 \tag{1.6}$$

La massa *M* del satellite diminuisce nel tempo secondo la legge: $M(t) = M_0 - \alpha t$ per cui la (1.6) diventa:

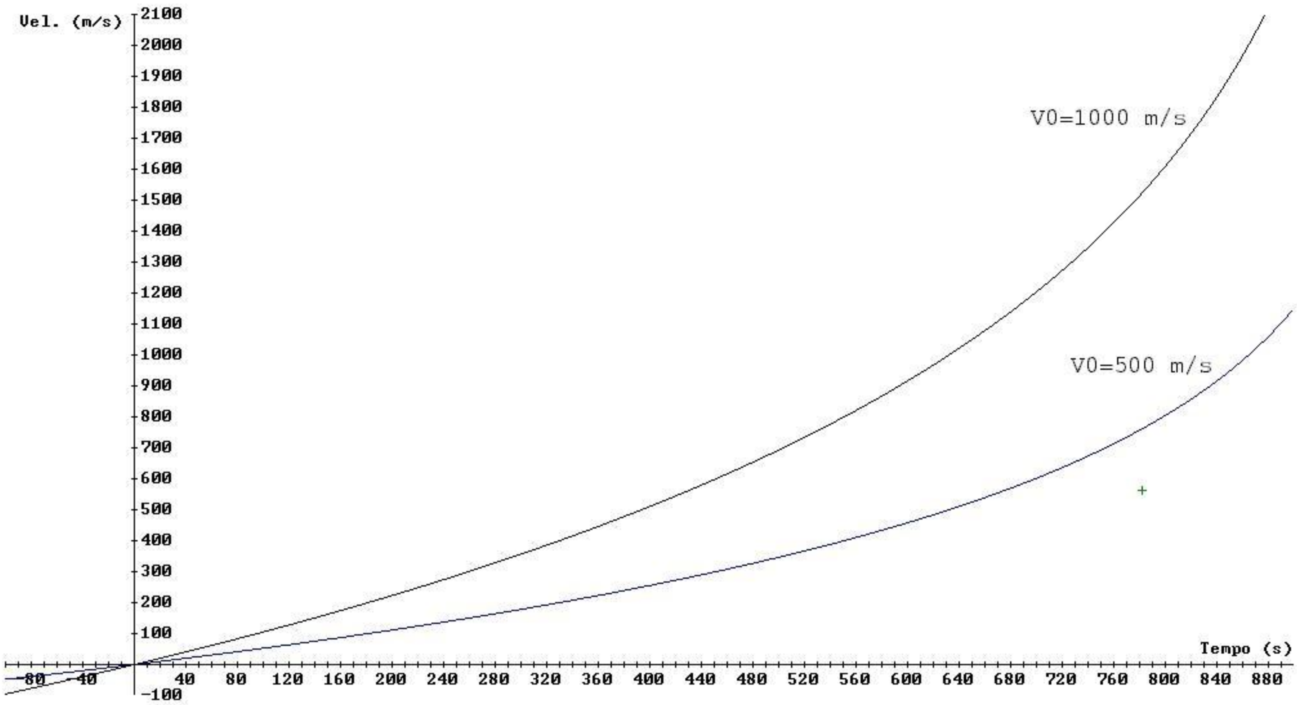
$$\dot{v} = \frac{\alpha V_0}{M_0 - \alpha t} \tag{1.7}$$

che risolta fornisce:

$$v = v_0 - V_0 \log\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right) = v_0 - V_0 \log\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \tag{1.8}$$

v_0 è la velocità del razzo all'istante t=0 mentre $t_0 = \frac{M_0}{\alpha}$ è il tempo teorico massimo che ci vorrebbe per espellere tutta la massa del razzo al ritmo α. Ovviamente il razzo non è costituito interamente di carburante ma solo per l'80-90% per cui il rapporto $\frac{t}{t_0}$ può arrivare al massimo a 0.8-0.9. Dalla (1.8) si vede chiaramente che per ottenere una grande velocità v del razzo occorre utilizzare propellente con una alta velocità di scarico. Da questo punto di vista, il gas migliore sarebbe quello composto da fotoni che viaggiano alla massima velocità possibile ossia quella della luce.

Qui di seguito si trovano due grafici che rappresentano l'equazione (1.8) nel caso in cui il razzo parta da fermo ($v_0 = 0$), scarichi il propellente con velocità relativa rispettivamente $V_0 = 500\ \mathrm{m/s}$ oppure $V_0 = 1000\ \mathrm{m/s}$ ad una frequenza di 1/1000 della massa totale del razzo (M_0) al secondo. In questo caso quindi $t_0 = 1000\ \mathrm{s}$ ed i dati sono stati plottati fino a 900 s, ossia come se il razzo fosse costituito al 90% di carburante. Dopo 900 s la velocità è di circa 1000 m/s o 2000 m/s per i due casi.



3) Esempio: Moto UNIDIMENSIONALE di caduta di un grave con attrito.

E' molto semplice risolvere l'equazione fondamentale della dinamica *F=ma* per un corpo che si muove soggetto ad una forza costante tipo quella di gravità *F=-mg.* Nel caso il proiettile sia lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 si ha:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{1.9}$$

che integrata 2 volte con le condizioni al contorno: $y(0) = y_0$ e $\left.\frac{dy}{dt}\right|_0 = v_0$ fornisce:

$$\begin{cases} v(t) = -gt + v_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Un po' meno semplice è risolvere il caso del moto dello stesso proiettile soggetto, oltre alla forza di gravità, anche alla **forza d'attrito dell'aria**. Supponiamo (come è poi ben verificato dai dati sperimentali) che la resistenza dinamica dell'aria sia proporzionale alla velocità del corpo materiale che vi si muove attraverso e scriviamo l'equazione del moto. Si ha:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}\frac{dy}{dt} \tag{1.11}$$

La soluzione di questa equazione differenziale del secondo ordine non omogenea si ottiene, come al solito, sommando le due soluzioni derivanti dall'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea ad una soluzione particolare. Come condizioni iniziali, scegliamo: $y(0) = 0; \quad v(0) = v_0$.

Cerchiamo soluzioni generali del tipo: $y = ce^{\lambda t}$. Sostituendo nell'equazione generale:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dy}{dt}=0 \qquad (1.12)$$

si ottiene:

$$y=\frac{m}{k}\left(v_0+g\frac{m}{k}\right)\left[1-e^{-\frac{k}{m}t}\right] \qquad (1.13)$$

A questa soluzione generale, sommiamo una soluzione particolare della (1.11) che è:

$$y=-g\frac{m}{k}t \qquad (1.14)$$

la soluzione completa della (1.11) è perciò:

$$y=\frac{m}{k}\left(v_0+g\frac{m}{k}\right)\left[1-e^{-\frac{k}{m}t}\right]-g\frac{m}{k}t \qquad (1.15)$$

Con l'aiuto di DERIVE possiamo graficare la (1.15) per diversi valori del coefficiente di attrito dinamico *k.* Avendo fissato m=1, v0=50 e g=10. Il sistema di unità di misure è l'Internazionale MKS. Nella Fig. 1 si vede che per k=0 la legge di y(t) è di tipo parabolico classico in accordo con la prima delle equazioni (1.10). Aumentando il coefficiente di attrito k, si notano tre importanti effetti:

1. l'altezza massima h raggiunta dal proiettile diminuisce vistosamente: già con k=0.25 $\frac{N\cdot s}{m}$, h=70 m anziché 125 m;
2. il tempo impiegato per ritornare a terra diminuisce sensibilmente; ma a grandi k (vedi Fig. 2 e soprattutto Fig 3) esso rimane pressoché costante e tende al valore 5 s ossia a $\frac{v_0}{g}$!
3. la velocità di caduta tende a diventare costante e non aumenta più linearmente come faceva nel caso classico senza attrito. Questo comportamento lo si vede bene nella Fig. 2 (e Fig. 3) dove k va da 2 a 8 e diventa quindi grande. Il grafico y=y(t) è rettilineo (v=cost) dopo che il proiettile raggiunge il massimo e poi comincia a cadere.

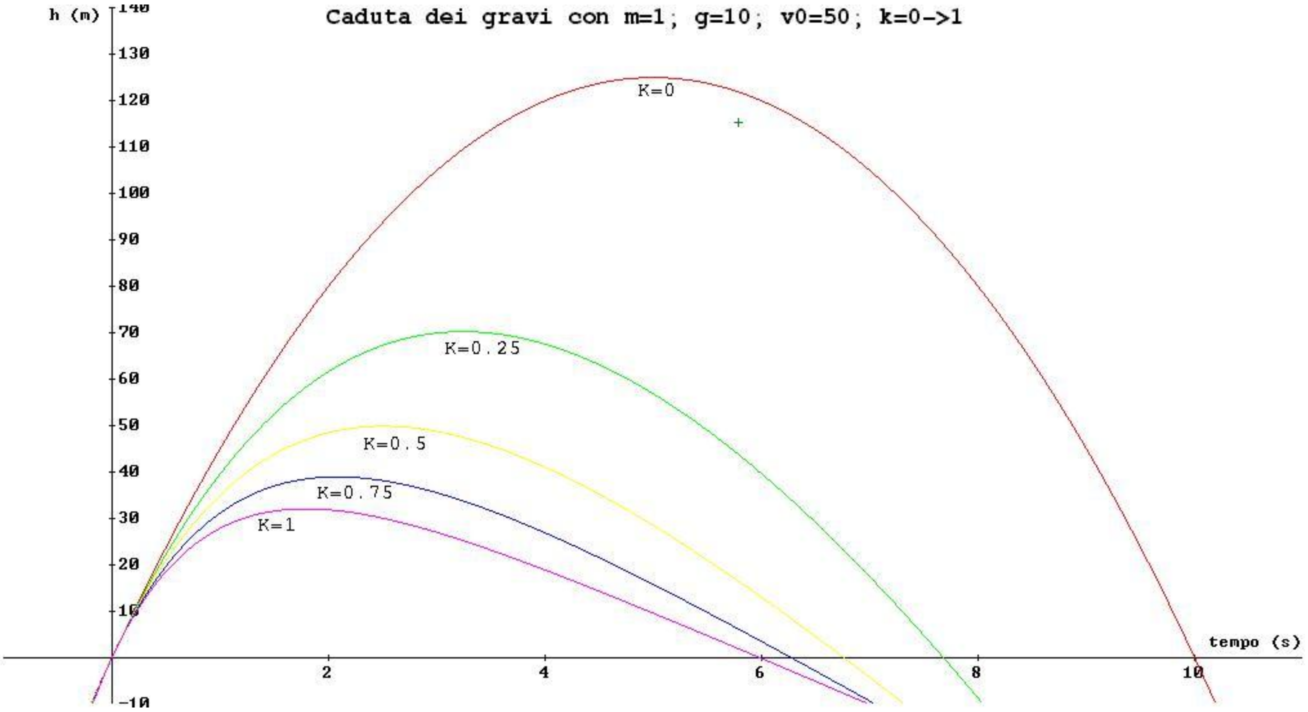


Fig. 1 Altezza raggiunta da un proiettile di massa m=1 Kg, sparato in verticale con velocità iniziale v0=50 m/s, sottoposto ad accelerazione di gravità g=10 m/s^2 e con forza di attrito via via più alta (k=0->1).

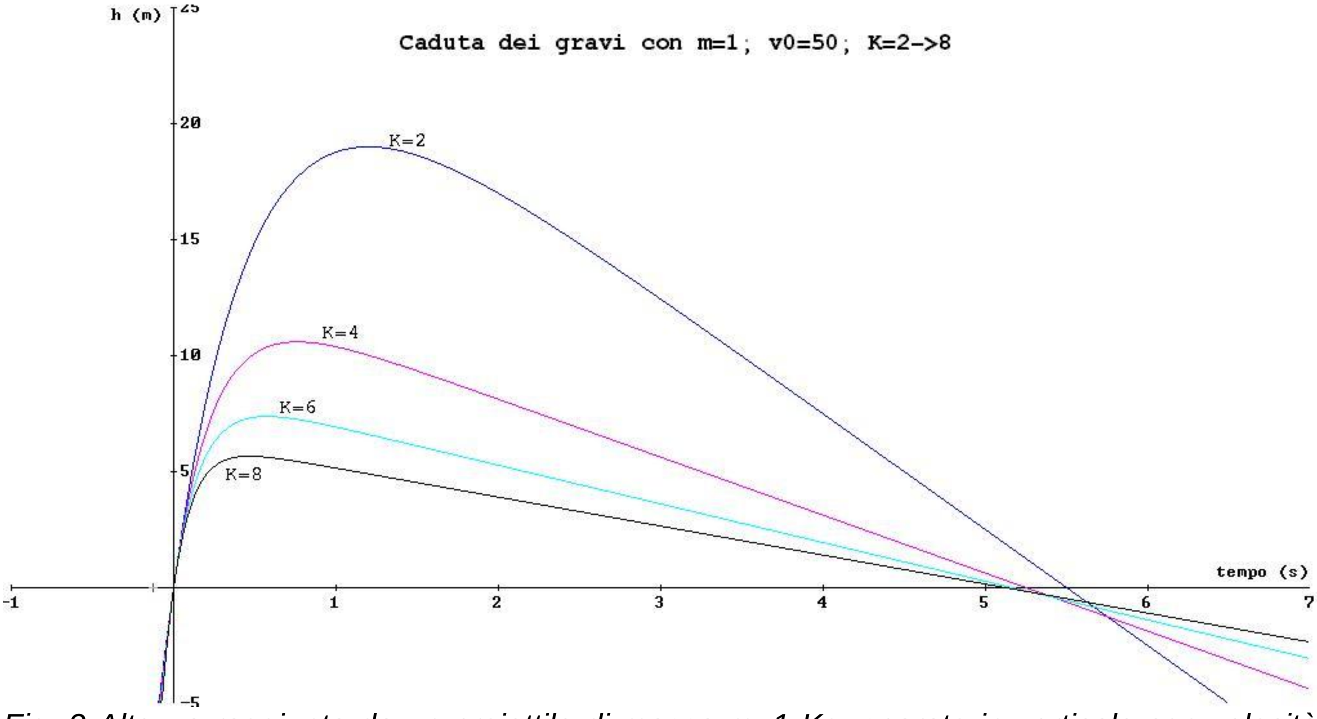


Fig. 2 Altezza raggiunta da un proiettile di massa m=1 Kg, sparato in verticale con velocità iniziale v0=50 m/s, sottoposto ad accelerazione di gravità g=10 m/s^2 e con forza di attrito molto grande (k=2->8). Con k=8 la forza di attrito nei primi istanti del lancio è circa 40 volte maggiore della forza di gravità (forza peso). Si noti la velocità costante del proiettile durante la caduta. Quando k>infinito il tempo impiegato a cadere è v0/g=5 s.

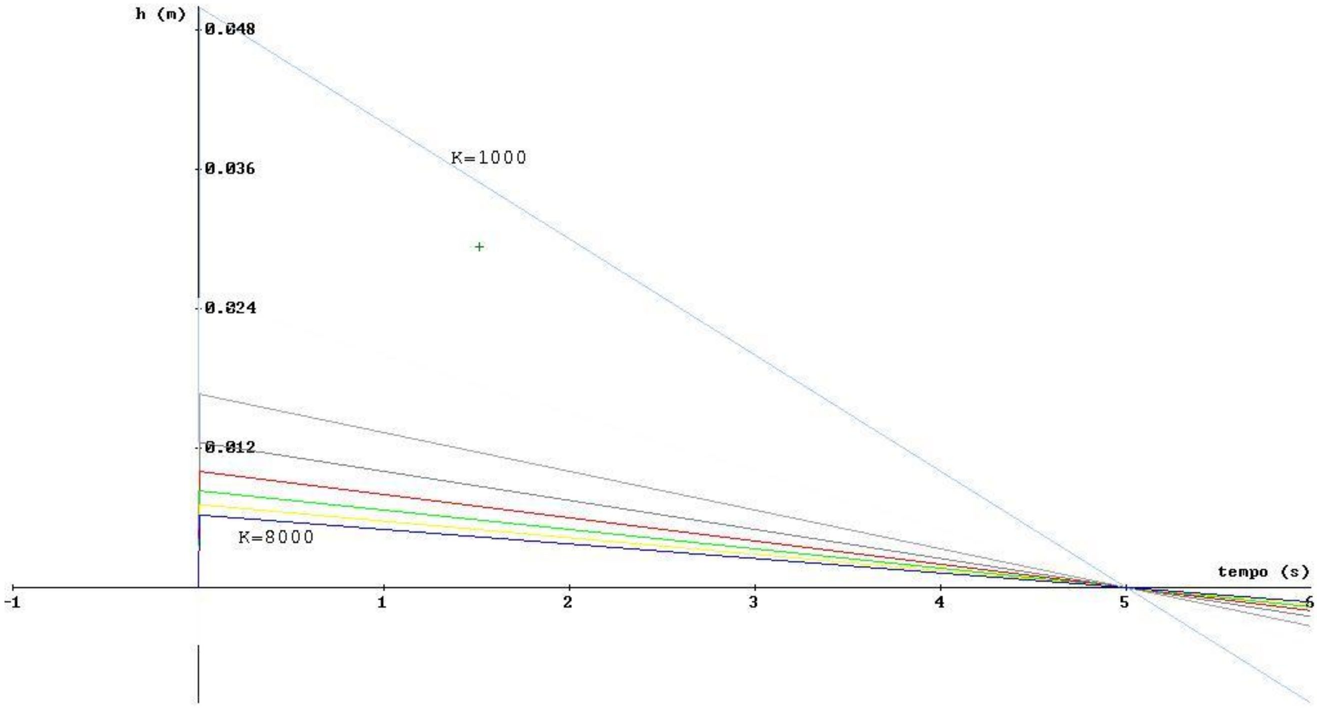


Fig. 3. Caso estremo con k enormi. E' evidentissima la velocità costante di caduta ed il limite temporale v0/g=5 s. La parabola si è trasformata in un triangolo rettangolo.

3 bis) Moto BIDIMENSIONALE di un proiettile con attrito.

Galileo è stato il primo a studiare in modo scientifico il moto di un proiettile dimostrando che la sua traiettoria è una parabola. I risultati ottenuti sono pubblicati nell'opera "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze".

Per estendere i calcoli a situazioni più realistiche tenendo conto anche dell'attrito dell'aria, è necessario far ricorso alle equazioni differenziali.


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniffimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Studio del moto del proiettile mediante le equazioni della cinematica

Considereremo il moto bidimensionale di un proiettile, come il moto di un punto materiale, tenendo conto sia delle forze gravitazionali che l'influenza delle forze di attritodell'aria.
Scegliendo un sistema di riferimento con l'asse delle y positivo verso l'alto, in modo

che l'origine degli assi sia nel punto $(x_0,y_0) = (0,0)$ di partenza del proiettile, le componenti dell'accelerazione saranno $a_x = 0$, $a_y = -g$.

Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g - \mu \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Da queste ultime due equazioni, integrando una volta, si ricavano le equazioni per le velocità

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\mu x(t) + v_{0x} \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt - \mu y(t) + v_{0y} \end{cases}$$

da cui è possibile ricavare il moto del proiettile, a partire dalle condizioni iniziali posizione e velocità.
Per risolvere queste equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, si procede nel solito modo: a) si cerca una soluzione dell'equazione omogenea; b) si cerca una soluzione particolare; c) si sommano le due soluzioni per determinare quella più generale;
Nel nostro caso la soluzione, dopo alcuni calcoli non difficili è:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_{0x}}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right) \\ y(t) = \left(\dfrac{v_{0y}}{\mu} + \dfrac{g}{\mu^2}\right)\left(1 - e^{-\mu t}\right) - \dfrac{g}{\mu} t \end{cases}$$

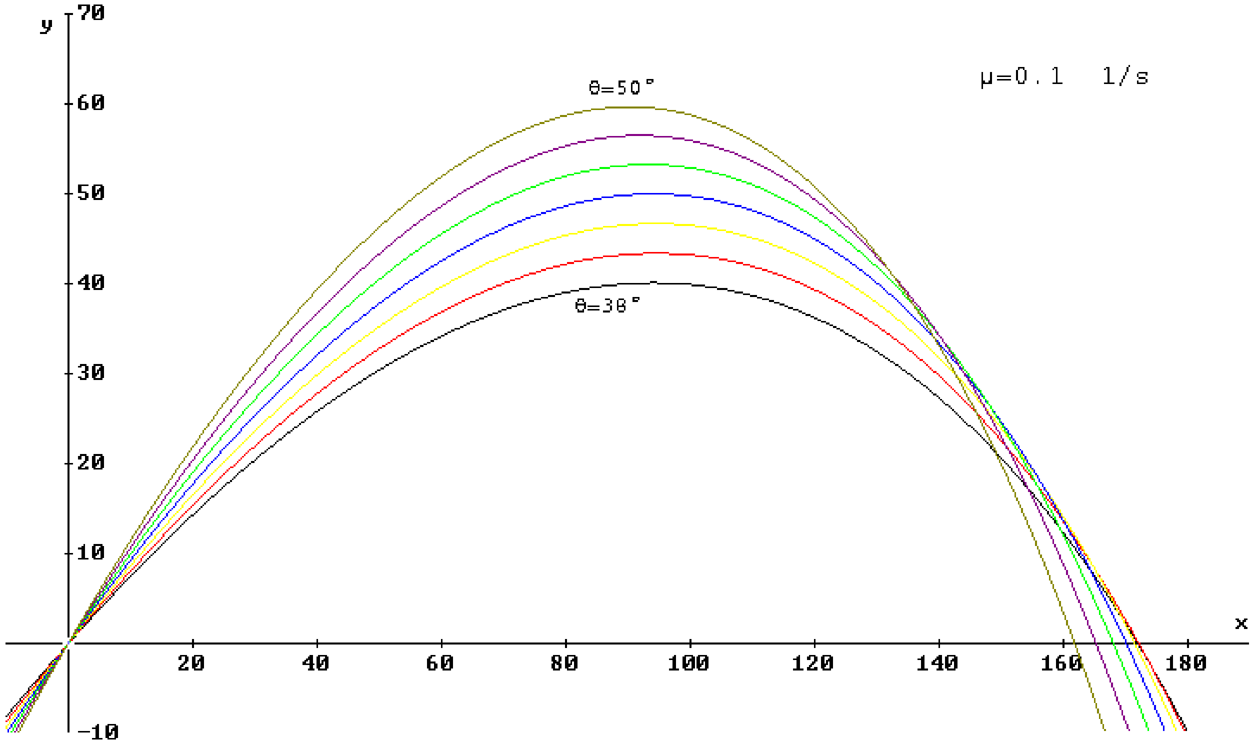
Da queste è abbastanza semplice ricavare la traiettoria in forma cartesiana; si ottiene:

$$y(x) = x\left(\tan\vartheta + \frac{g}{\mu v_0 \cos\vartheta}\right) + \frac{g}{\mu^2}\ln\left(1 - \frac{\mu}{v_0\cos\vartheta}x\right)$$

dove ϑ è l'angolo di lancio iniziale e v_0 è il modulo della velocità iniziale. $\tan\vartheta = \dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$.

E' interessante mostrare qualche grafico di questa nuova traiettoria che NON è una parabola.

Prendiamo mu=0.1 e v0=50 m/s e grafichiamo le traiettorie con angoli di lancio fra 38°<ϑ<50° a passi di 2°. Come si può notare, il massimo della gittata non si ottiene più per un angolo di 45° ma per $\vartheta \approx 40°$ (in realtà l'angolo è di poco inferiore) e corrisponde alla traiettoria rossa.



Traiettorie di proiettili lanciati dall'origine a vari angoli con coefficiente di attrito dinamico mu=0.1 1/s.

Le coordinate del punto di massimo sono ora:

$$x_M = \frac{v_0^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{g + \mu v_0 \sin\vartheta}$$

$$y_M = \frac{g}{\mu^2} \ln\left(\frac{g}{g + \mu v_0 \sin\vartheta}\right) + \frac{v_0 \sin\vartheta}{\mu}$$

Almeno per la coordinata x del punto di massimo, è facile vedere come esso tenda al valore classico quando il coefficiente di attrito dinamico mu->0. Per il valore di y, bisogna calcolare il limite e si ottiene anche per esso il valore classico:

$$y_M = \frac{v_0^2 \sin^2\vartheta}{g}$$

Per trovare la gittata dovremmo porre = 0 l'equazione della traiettoria. Ora anche Derive non è in grado di risolverla analiticamente, ma solo numericamente dando ai vari parametri dei valori fissati.

4) Esempio. Oscillatore armonico normale e smorzato.

Questo è un esempio davvero classico e comunque molto importante in tutta la fisica. Si tratta di trovare la legge oraria di una massa m soggetta ad una forza di richiamo elastica (F=-kx) tenendo conto dell'attrito durante il moto.

La 2° legge della dinamica per questo caso si scrive:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x \tag{1.16}$$

che rappresenta una equazione differenziale del 2° ordine, omogenea a coefficienti costanti. Risolvendo la sua equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \tag{1.17}$$

si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} \tag{1.18}$$

e quindi:

$$x(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} \tag{1.19}$$

Distinguiamo 3 casi diversi:

1. $$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\sqrt{mk} \tag{1.20}$$

In questo caso $\lambda_1 = \lambda_2$ e la soluzione della (1.19) diventa:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(1 + \frac{\alpha}{2m}t\right) \tag{1.21}$$

dove sono state imposte le condizioni iniziali x(0)=A e $\dot{x}(0) = 0$. Questa situazione viene chiamata di smorzamento critico perché il punto materiale raggiunge il punto di equilibrio x=0 nel minor tempo possibile senza oscillarci attorno.

2. $$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{m} > 2\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \alpha > 2\sqrt{mk} \tag{1.22}$$

In questo caso il moto è sempre smorzato esponenzialmente ma non critico, nel senso che il punto materiale raggiunge l'equilibrio in un tempo maggiore rispetto al precedente. La soluzione è :

$$x(t) = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta m}\right)e^{-\left(\frac{\alpha}{2m}+\beta\right)t} + \frac{A}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2\beta m}\right)e^{-\left(\frac{\alpha}{2m}-\beta\right)t} \tag{1.23}$$

dove sono state imposte le medesime condizioni iniziali di prima.