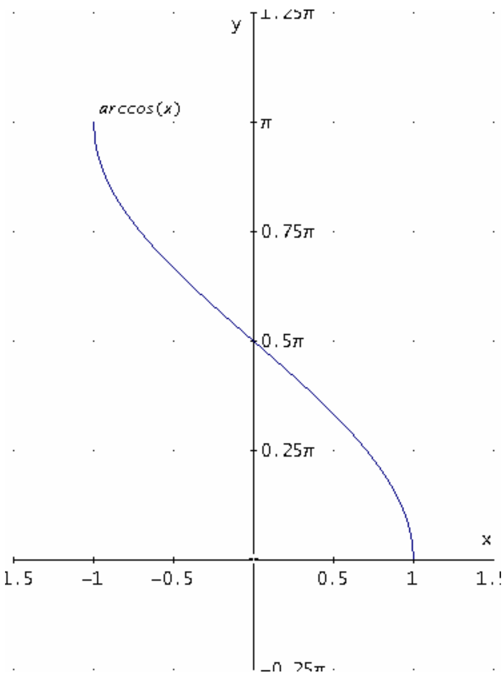
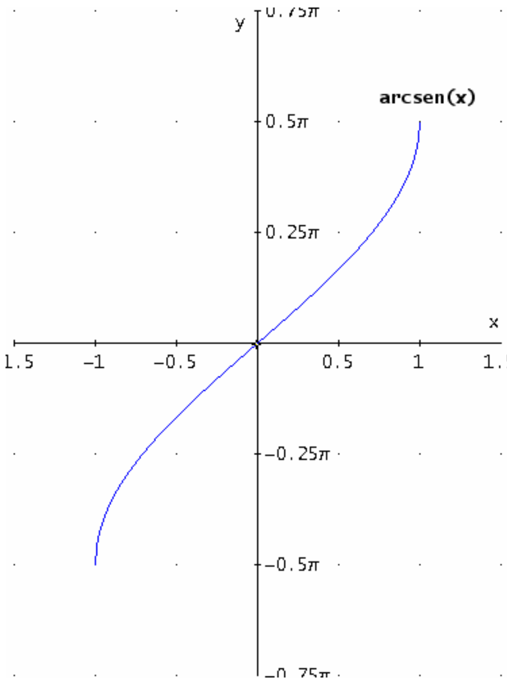
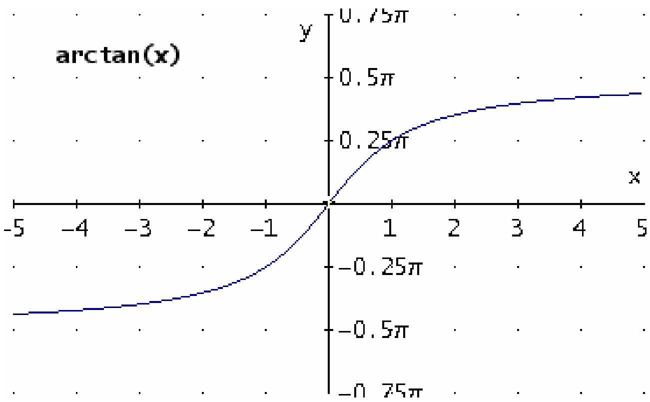
Approfondimento sulle funzioni trigonometriche inverse

Abbiamo già avuto modo di studiare le funzioni trigonometriche inverse arccos(x), arcsen(x), arctan(x) i ci grafici sono riportati di seguito.







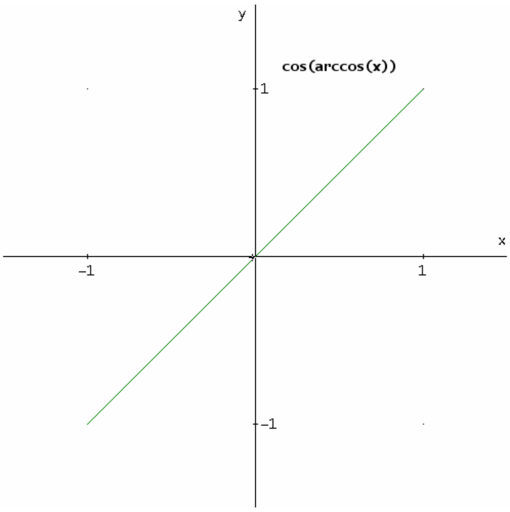
Ora studieremo le funzioni composte tipo cos(arccos(x)).

1a. *y = cos(arccos(x))* D=[-1,1]

La funzione y=arccos(x) ha come dominio l'intervallo chiuso D=[-1,1]. All'interno di questo dominio se applichiamo alla funzione arccos(x) la sua inversa (ossia il coseno) otteniamo l'identità.

$$y = \cos(\arccos x) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{1.1}$$

Es. cos(arccos(3/4)) = 3/4

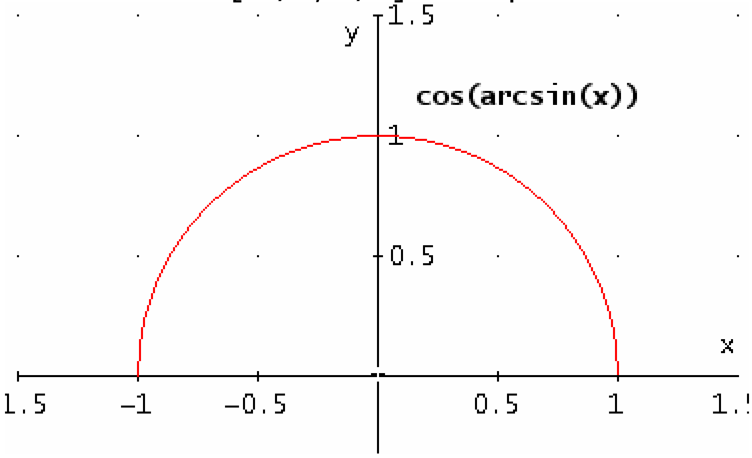


1b. *y = cos(arcsin(x))* D=[-1,1]

Per semplificare questa funzione ricordiamoci che il coseno si può esprimere in funzione del seno: $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ e quindi la 1b diventa:

$$y = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{1.2}$$

che è una semicirconferenza! Notiamo che il segno algebrico è giusto perché l'arcsin(x) ha come codominio [-π/2, π/2] e su questo intervallo il coseno è >0.



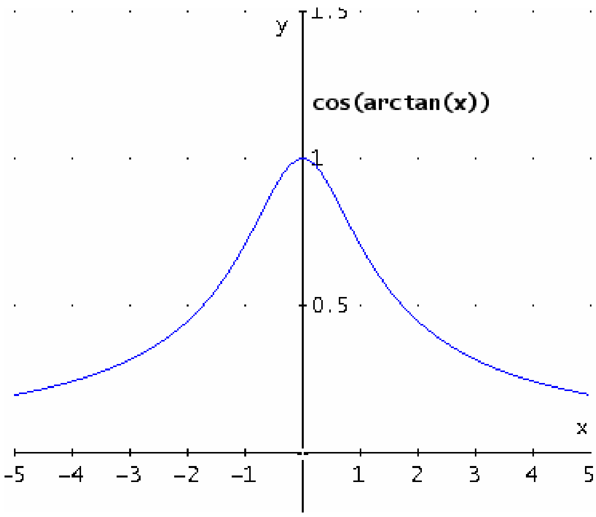
Es. cos(arcsin(1/3))= $\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

1c. *y = cos(arctan(x))* D=***R***

Esprimiamo il cos(x) in funzione della tangente: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ e quindi la 1c diventa:

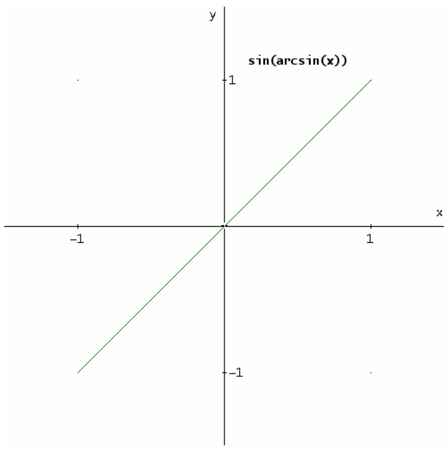
$$y = \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in \Re \tag{1.3}$$

Es. cos(arctan(1/2))= $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$



2a. ***y = sin(arcsin(x))*** D=[-1,1]
Similmente al caso 1a otteniamo:

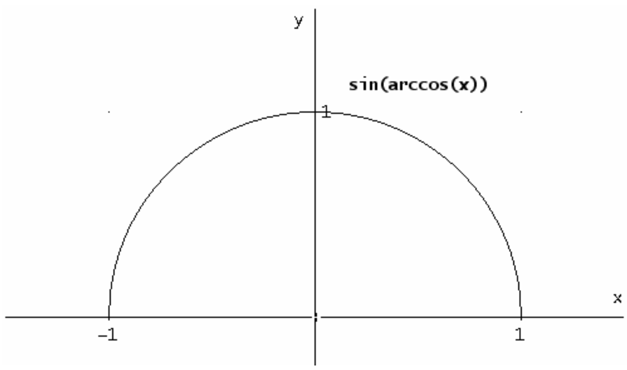
$$y = \sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{1.4}$$



Es. sin(arcsin(-1/2))=-1/2

2b. ***y = sin(arccos(x))*** D=[-1,1]
Procediamo come nel caso 1b, ricordandoci che $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. si ottiene di nuovo la funzione:

$$y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{1.5}$$

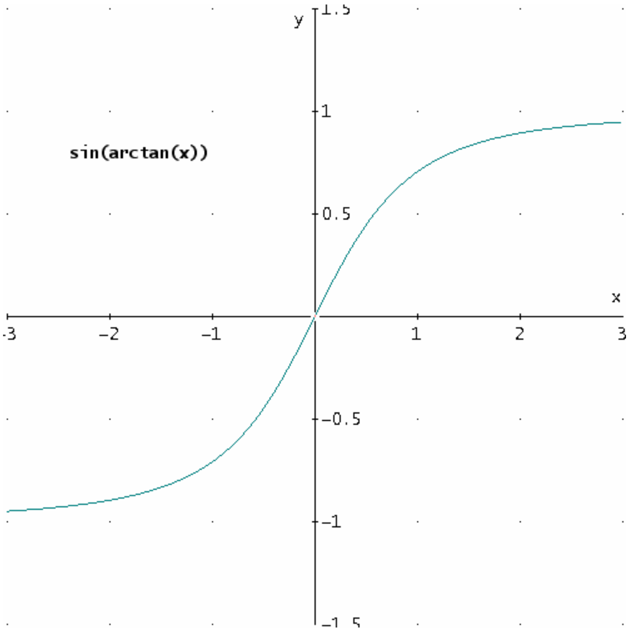


Es. sin(arccos(2/5))= $\frac{\sqrt{21}}{5}$

2c. *y = sin(arctan(x))* D=***R***

Esprimiamo sin(x) in funzione della tangente: $\sin(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$. La 2c diventa:

$$y=\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x\in\Re \tag{1.6}$$

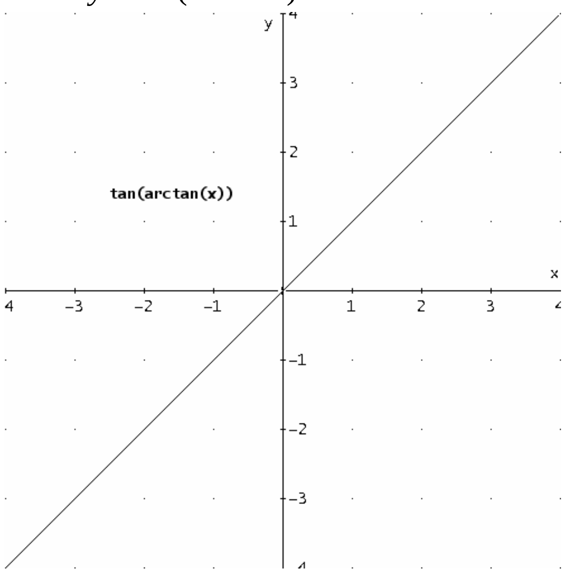


Es. $\sin(\arctan(-2/3))=\frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}}=-\frac{2}{13}$

3a. *y = tan(arctan(x))* D=***R***

Similmente al caso 1a otteniamo:

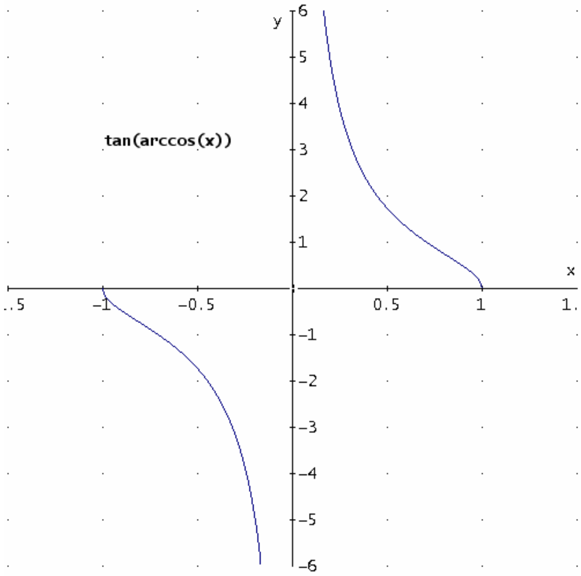
$$y=\tan(\arctan x)=x \qquad \forall x\in\Re \tag{1.7}$$



3b. *y = tan(arccos(x))* D=[-1,1], x≠0

Procediamo come nel caso 1b, ricordandoci che $\tan x = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$. Si ottiene:

$$y = \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \forall x \in [-1,1],\ x \neq 0 \tag{1.8}$$

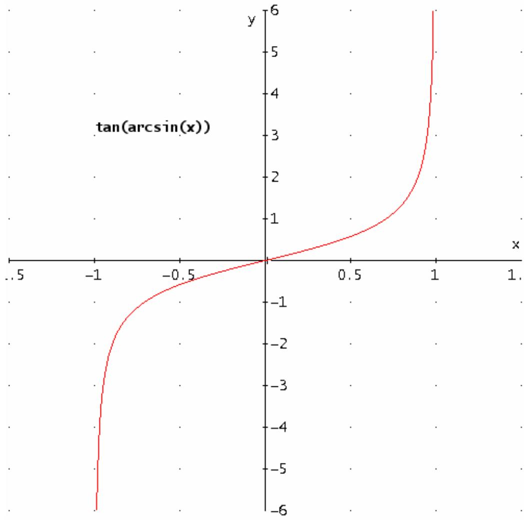


Es. tan(arccos(-4/5))= $\frac{\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

3c. ***y = tan(arcsin(x))*** D= $]-1,1[$

Esprimiamo la tan(x) in funzione del sin(x): $\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$. La 3c diventa:

$$y = \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[\tag{1.9}$$



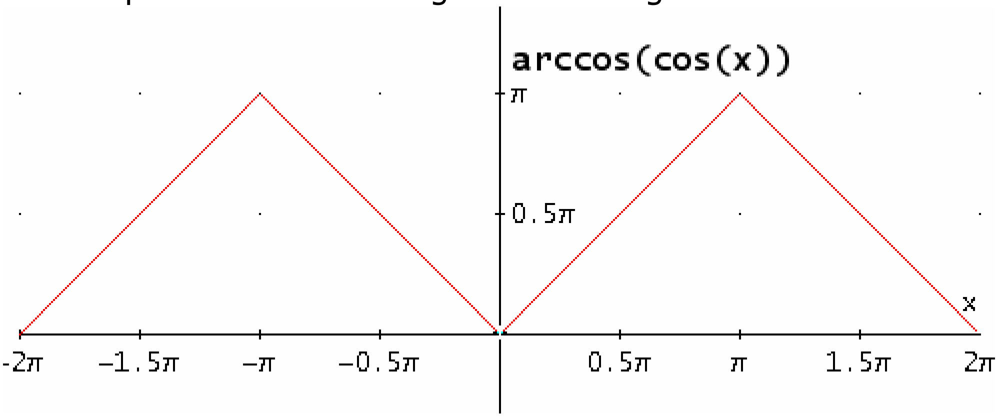
Es. tan(arcsin(1/4))= $\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

Vediamo ora cosa succede invertendo l'ordine delle funzioni dirette e inverse.

4a. y=arccos(cos(x)) D=**R**. Questa semplice funzione è identica a:

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi \\ -x & -\pi \le x \le 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

poi si ripete con periodo 2π. Il suo grafico è il seguente.



4b. Continuiamo con: y=arccos(sin(x)) D=**R.** Per semplificarla scriviamo il sin(x) = cos(π/2-x). Quindi la 4b diventa:

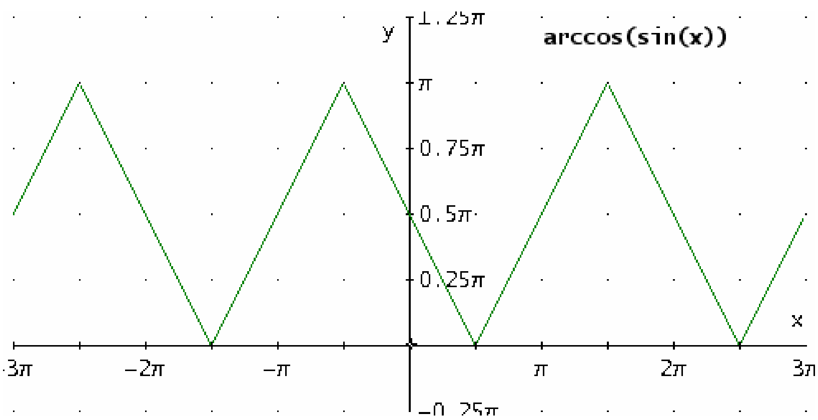
$$y = \arccos(\sin x) = \arccos(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)) = \frac{\pi}{2} - x \qquad 0 \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \quad (1.11)$$

Essa rappresenta un segmento con pendenza -45°.

Ora, se $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$, la (1.11) non può essere vera perché l'arccos(x) ha come codominio un numero $\in [0, \pi]$. Ricorriamo allora all'identità: $\cos x = \cos(-x)$. In questo modo si ha: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$. La 4a diventa allora:

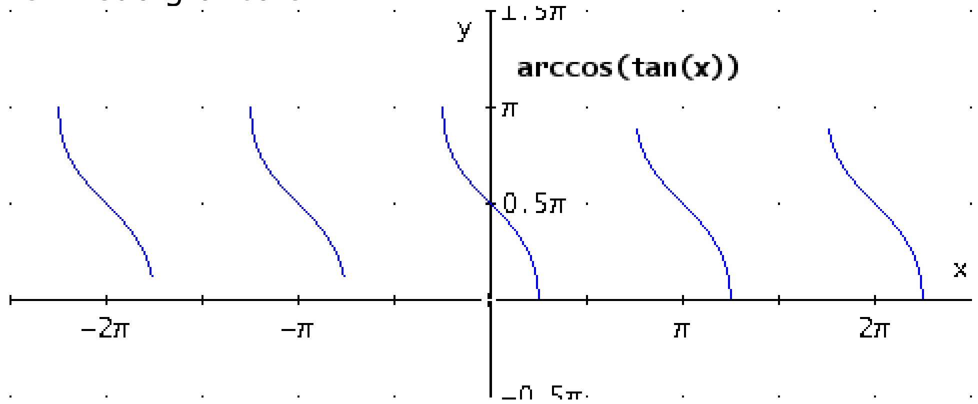
$$y = \arccos(\sin x) = \arccos(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)) = -\frac{\pi}{2} + x \qquad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi \quad (1.12)$$

Da qui in poi la funzione si ripete ed il suo andamento è quello sottostante.



Es. $\arccos(\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

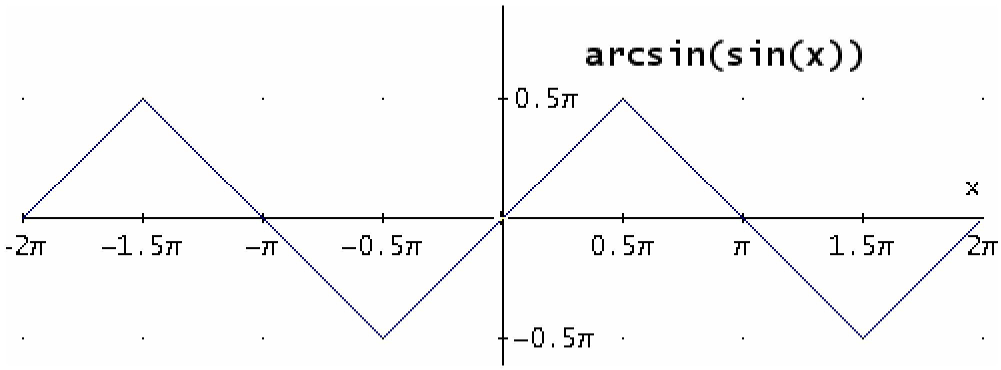
4c. y=arccos(tan(x)) D=$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$+k$\pi$**.** Questa funzione non si può semplificare. Il suo grafico è:



5a. y=arcsin(sin(x)) D=**R.** Questa semplice funzione è identica a:

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ -x+\pi & \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (1.13)$$

poi si ripete con periodo 2π. Il suo grafico è il seguente.



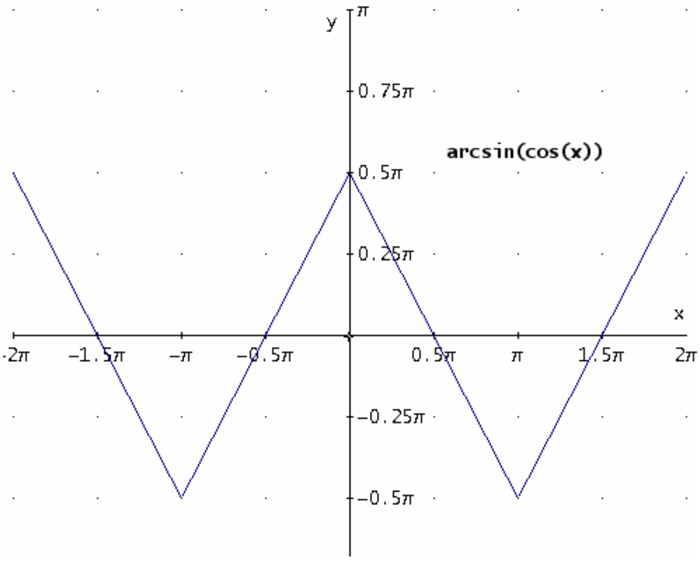
5b. y=arcsin(cos(x)) D=**R.** Per semplificarla scriviamo il cos(x) = sin(п/2-x). Quindi diventa:

$$y=\arcsin(\cos x)=\arcsin(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right))=\frac{\pi}{2}-x \qquad -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}-x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le x\le\pi \quad (1.14)$$

Essa rappresenta un segmento con pendenza -45°.
Ora, se $\pi\le x\le 2\pi$, la (1.14) non può essere vera perché l'arcsin(x) ha come codominio un numero $\in$[-π/2,π/2]. Ricorriamo allora all'identità: $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. In questo modo si ha:

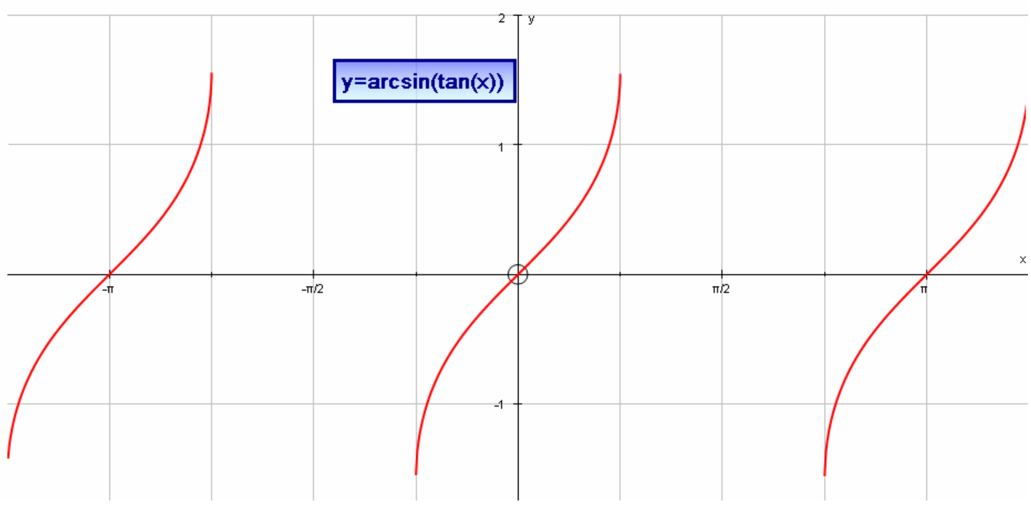
$$y=\arcsin(\cos x)=\arcsin(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right))=\frac{\pi}{2}+x \qquad -\pi\le x\le 0 \quad (1.15)$$

che è ancora un segmento con pendenza 45°. I due tratti sopra trovati si ripetono dando luogo al grafico seguente:



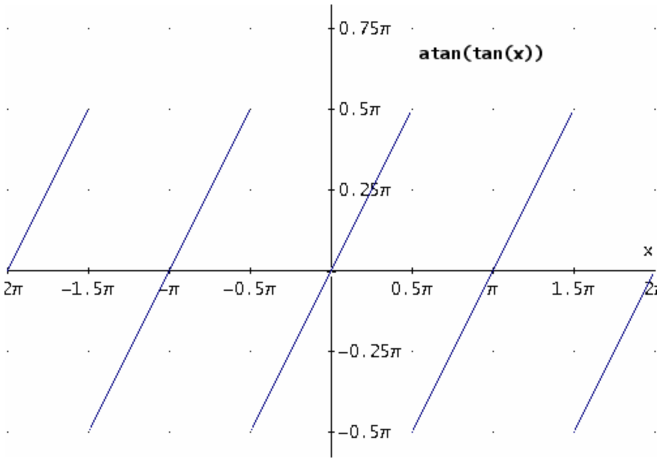
Es. arcsin(cos($\frac{\pi}{6}$))=$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

5c. y=arcsin(tan(x)). Questa funzione non si può semplificare in una algebrica. Il suo dominio è: D=[-π/4,π/4] +kπ ed il suo grafico è il seguente.



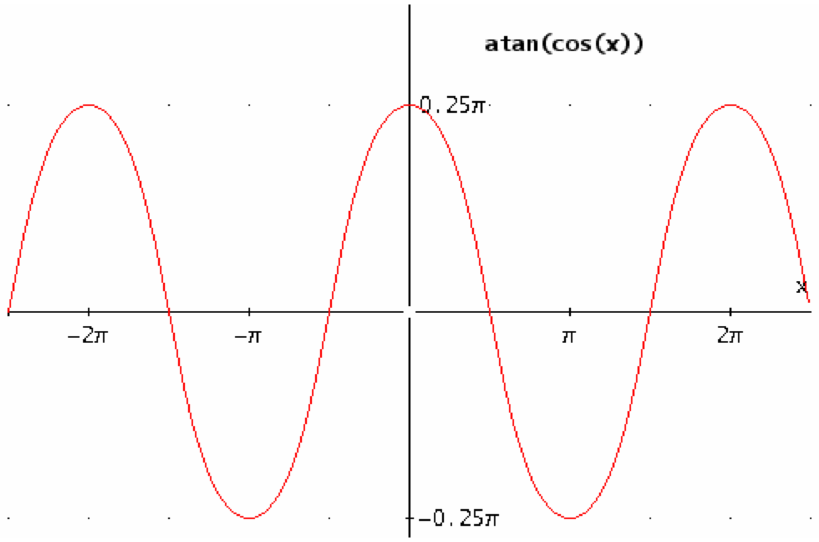
6a. *y=arctan(tan(x))* *D*=**R** −(2k+1**)** π/2

Questa funzione è y=x nel dominio base $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ .Poi si ripete con periodo π.



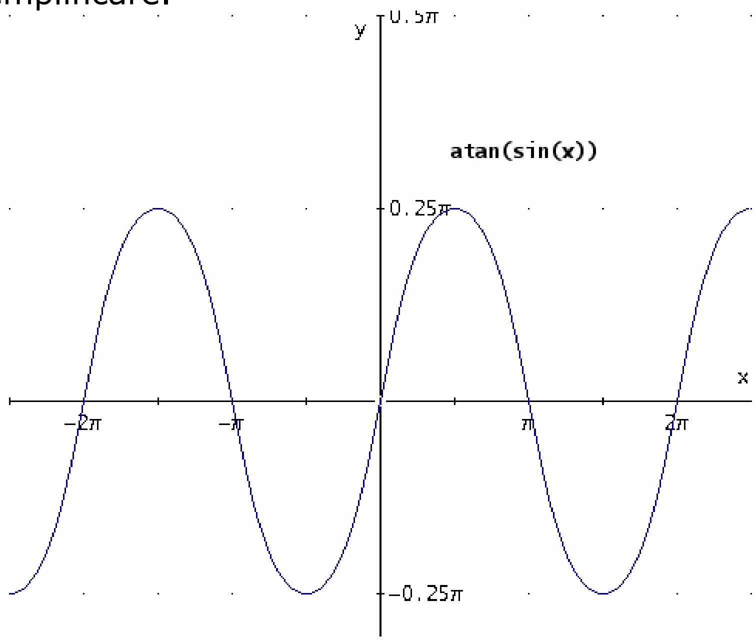
6b. y=arctan(cos(x)) D=**R.**

Questa funzione assomiglia molto ad un semplice sin(x) ma è più tondeggiante nei massimi e nei minimi e non raggiunge -1 e 1 bensì $\pm\pi/4$: non si può ulteriormente semplificare.

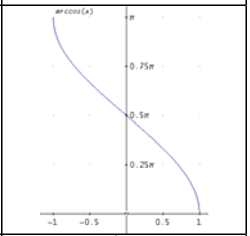
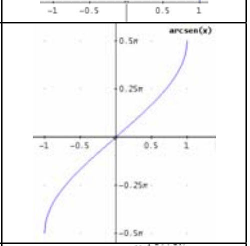
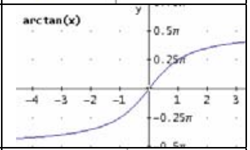
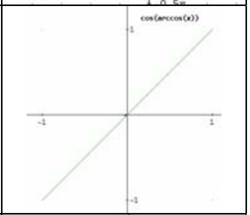
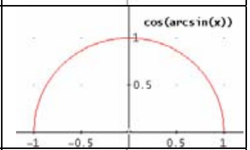
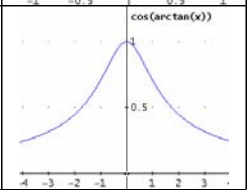
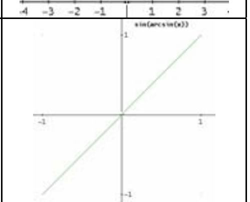
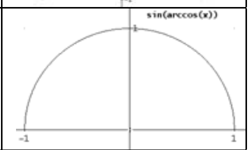
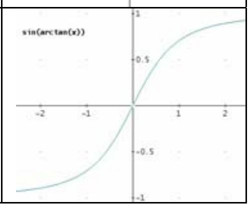


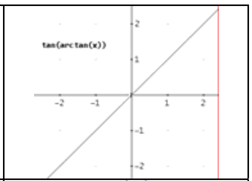
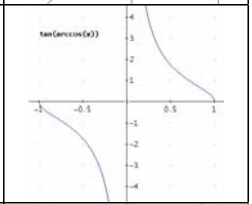
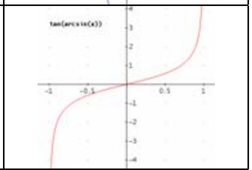
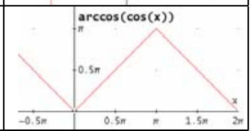
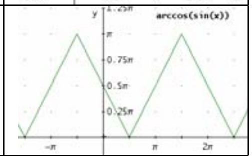
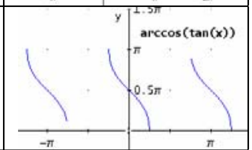
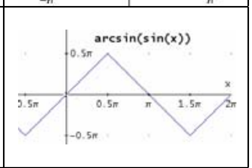
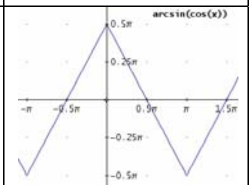
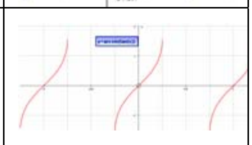
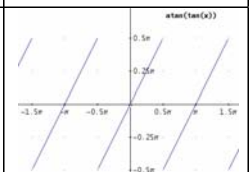
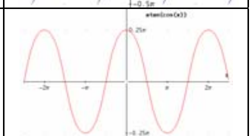
6c. y=arctan(sin(x)) D=**R.**

Questa funzione assomiglia molto ad un semplice sin(x) ma è più tondeggiante nei massimi e nei minimi e non raggiunge -1 e 1 bensì $\pm\pi/4$: non si può ulteriormente semplificare.



RIEPILOGO

Funzione	Dominio	Codom.	Simmetrie	Espres.	Grafico
arccos(x)	[-1,1]	$\left[0,\pi\right]$	/	/	
arcsin(x)	[-1,1]	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	Dispari	/	
arctan(x)	$\Re$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	Dispari	/	
cos(arccos(x))	[-1,1]	[-1,1]	Dispari	***x***	
cos(arcsin(x))	[-1,1]	[0,1]	Pari	$\sqrt{1-x^2}$	
cos(arctan(x))	$\Re$	[0,1]	Pari	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
sin(arcsin(x))	[-1,1]	[-1,1]	Dispari	***x***	
sin(arccos(x))	[-1,1]	[0,1]	Pari	$\sqrt{1-x^2}$	
sin(arctan(x))	$\Re$	[-1,1]	Dispari	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	

tan(arctan(x))	$\Re$	$\Re$	Dispari	***x***	
tan(arccos(x))	[-1,1], x≠0	$\Re$	Dispari	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	
tan(arcsin(x))	$]-1,1[$	$\Re$	Dispari	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	
arccos(cos(x))	$\Re$	$[0,\pi]$	Pari $\arccos(\cos x)=\begin{cases} x & 0\le x\le\pi \\ -x & -\pi\le x\le 0\end{cases}$		
arccos(sin(x))	$\Re$	$[0,\pi]$	/ $\frac{\pi}{2}-x,\quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$		
arccos(tan(x))	$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]+k\pi$	$[0,\pi]$	/	/	
arcsin(sin(x))	$\Re$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	Dispari $\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ -x+\pi & \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi\end{cases}$		
arcsin(cos(x))	$\Re$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	Pari $\arcsin(\cos x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}-x & 0\le x\le\pi \\ \frac{\pi}{2}+x & -\pi\le x\le 0\end{cases}$		
arcsin(tan(x))	$[-\pi/4, \pi/4]+k\pi$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	Dispari	/	
arctan(tan(x))	$\Re$ - (2k+1) $\frac{\pi}{2}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	Dispari	**x**	
arctan(cos(x))	$\Re$	$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$	Pari	/	
arctan(sin(x))	$\Re$	$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$	Dispari	/