

# 1. Numeri

*"Dio ha creato i numeri interi: tutto il resto è opera dell'uomo."* (D. Kronecher)

Legenda dei simboli.	
Simbolo	Significato
$\in$	Appartiene
$\notin$	Non appartiene
$\forall$	Per ogni
$\exists$	Esiste
$\cup$	Unione
$\cap$	Intersezione
$\subset$	Incluso
$\infty$	Infinito

**Tabella 1**

## Introduzione.

Quando si pensa ad un numero, difficilmente si pensa ad un numero decimale o ad una frazione; ancora più raramente ci si sofferma su di un numero sotto radice, su di un logaritmo o su di un esponenziale.

Ma la verità è che esiste una varietà di tipi di numeri profondamente diversi l'uno dall'altro ed il loro studio e la loro comprensione (almeno nei loro aspetti generali) ci apre le porte alle grandi conquiste del pensiero umano e della storia della matematica fatte da i più grandi geni di tutti i tempi, da Pitagora a Cantor e oltre, fino ai giorni nostri.

### 1.1 L'insieme dei numeri naturali ed il principio di induzione.

I numeri più semplici ed intuitivi, sono sicuramente quelli che abbiamo cominciato ad imparare da piccoli quando, contando con le dita, si diceva: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .... Sono i cosiddetti numeri **NATURALI** che in matematica formano l'insieme  $\mathbb{N}$ , ossia:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\} \quad (1.1)$$

L'insieme  $\mathbb{N}$  viene chiamato anche insieme induttivo perché può essere costruito formalmente attraverso il **Principio di Induzione**. Esso afferma la seguente cosa.

Sia  $P$  una proposizione significativa (cioè sensata) per l'insieme dei numeri naturali. Ipotizziamo che:

- i.  $P(1)$  sia vera (ossia, la proposizione è verificata quando è applicata al  $n^{\circ} 1$ );
- ii. se supponendo vera la proposizione  $P$  per il numero naturale  $n$  si può dimostrare che essa vale anche per il numero naturale successivo  $(n+1)$ ,

**ALLORA**

$P(n)$  è vera sempre, per tutti i numeri naturali.

Prendiamo il numero 1 come capostipite dei numeri naturali e come proposizione  $P$ , l'appartenenza all'insieme. Definiamo  $\mathbb{N}$  come l'insieme in cui vale il principio di induzione applicato a questa proposizione; allora in questo caso deve valere la prima ipotesi ( $1 \in$  all'insieme) e la seconda e cioè che se all'insieme appartiene il numero  $n$  allora vi appartiene anche il successivo. Da 1 quindi possiamo passare a 2, poi a 3 ecc. costruendo tutto l'insieme dei numeri naturali (vedi Appendice A).

Con i numeri naturali si possono fare tante cose, ma appena tentiamo di sottrarre due numeri naturali fra loro, ci accorgiamo che talvolta siamo costretti a rinunciare dicendo che è impossibile, per esempio, sottrarre 5 da 3, ossia che non ha senso, all'interno di questo insieme, eseguire l'operazione:

$$3 - 5 = ?$$

A questo punto abbiamo due alternative: o rinunciamo ad eseguire operazioni di questo tipo, oppure allarghiamo l'insieme dei numeri naturali.

E' ovvio che è preferibile scegliere la seconda ipotesi se non altro per una questione di libertà ed ... orgoglio.

*Possiamo senz'altro dire che l'essenza ultima della matematica è la libertà di pensiero e questo spiega perché la culla della matematica è stata l'antica Grecia in cui gli uomini liberi delle Polis (Talete, Pitagora, Ippocrate di Chio, Archita di Taranto fedele amico di Platone) discutevano di problemi astratti senza rendere conto a nessun re o faraone o funzionario, ma cercando solo di convincere con argomentazioni logiche (quelle che poi sarebbero diventate le dimostrazioni) i loro interlocutori.*

### 1.2 I numeri interi relativi.

Introduciamo allora l'insieme dei numeri **INTERI RELATIVI** che indichiamo con  $\mathbb{Z}$ . Esso comprende tutti i numeri naturali, lo 0 ed i numeri naturali con segno negativo:

$$\mathbb{Z} = \{\mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.2)$$

Si ha dunque:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . I numeri negativi erano sconosciuti ai greci. Gli arabi li chiamavano *Naquis* ossia gli "amputati" e non venivano considerati nelle loro equazioni.

Ma anche  $\mathbb{Z}$  non è abbastanza "grande" o completo per poterci svolgere comodamente tutte le 4 operazioni elementari (+, -, x, :). Infatti se divido 7 in 3 parti:

$$7 : 3 = ?$$

cosa ottengo? Non certo un numero intero. Questa operazione non ha soluzioni in  $\mathbb{Z}$ , ossia non è definita. E allora?

### 1.3 I numeri razionali.

È necessario ancora una volta ampliare l'insieme  $\mathbb{Z}$ , introducendo anche i numeri **RAZIONALI** che indicheremo con  $\mathbb{Q}$  ottenuti dividendo un numero intero relativo per un numero intero, cioè:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \dots, -7, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}, 4, \frac{59}{18}, \dots \right\} \quad (1.3)$$

Si ha dunque:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

I matematici arabi ed il particolare Al-Khwarizmi l'autore del testo: "*Kitab al-muhtasar fi hisab al-Jabr wa al-Muqabalah*" (Trattato sul calcolo dell'aggiustamento e del confronto) ossia la moderna Algebra (*al-Jabr* = aggiustamento, mettere a posto qualcosa di rotto come le ossa e *al-Muqabalah* = confronto) chiamavano le frazioni

(dal latino fractiones) *kasr* che significa rotto, spezzato. Quindi i matematici algebristi non erano altro che conciaossa che cercavano di aggiustare numeri rotti. Spezziamo per esempio 5 in 5 parti (i quinti). Ora prendine 3 e avrai ottenuto  $3/5$ . Cinque è il denominatore che denomina il numero rotto e 3 è il numeratore che numera quanti quinti prendere (notazione di Oresme, guerra dei Cent'anni).

A questo punto potremmo pensare di essere arrivati. Con i numeri razionali posso eseguire tutte le 4 operazioni fondamentali e non sentire il bisogno di cercare altri numeri perché il risultato è sempre un numero razionale. (si dice anche che  $\mathbb{Q}$  è chiuso rispetto alle 4 operazioni aritmetiche). Posso inoltre dividere un segmento in tante parti piccole quanto voglio (per esempio  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ) senza mai fermarmi e presi due numeri razionali **vicini a piacere**, posso sempre trovarne un terzo che vi sta nel mezzo prendendo appunto la loro media aritmetica (si dice che  $\mathbb{Q}$  è "**denso**"). Posso anche rappresentare tutti i numeri decimali periodici semplici come  $0,\bar{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$  o periodici composti del tipo  $1.8\overline{65} = \frac{1865 - 18}{990} = \frac{1847}{990}$  usando solamente i numeri razionali. Infatti scriviamo:

$$\begin{array}{r} 10x = 3.\bar{3} \\ x = 0.\bar{3} \\ \hline 9x = 3 \end{array} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

dove abbiamo sottratto membro a membro.

Lo stesso ragionamento possiamo applicarlo al numero periodico composto:

$$\begin{array}{r} 1000x = 1865.\overline{65} \\ 10x = 18.\overline{65} \\ \hline 990x = 1865 - 18 \end{array} \Rightarrow x = \frac{1865 - 18}{990} = \frac{1847}{990}$$

In realtà il viaggio nel mondo dei numeri è solo agli inizi e dietro l'angolo ci aspettano grandi sorprese!

### 1.4 I numeri irrazionali.

Quando i matematici greci cercarono di misurare la diagonale di un quadrato conoscendone il lato, si imbararono in una difficoltà incredibile e all'apparenza insormontabile. Essi si accorsero che per quanto si sforzassero di dividere in tante parti uguali (anche piccolissime a piacere) il lato  $L$  del quadrato, la sua diagonale  $D$  non poteva **mai** essere misurata in modo perfetto da un numero intero di queste piccole parti. Con sconcerto, conclusero che il lato di un qualunque quadrato e la sua diagonale sono quantità INCOMMENSURABILI, cioè non esiste alcuna coppia di numeri interi tale che il loro rapporto sia uguale al rapporto fra diagonale e lato di un

quadrato. Si racconta che tale fu la meraviglia di questa scoperta fatta della scuola mistico-matematica di Talete (624-546 a.C.) e dai pitagorici poi che fu tassativamente proibito agli adepti di divulgarla. Ippaso di Metaponto, un discepolo di Pitagora, pagò con la vita la violazione di questo segreto. Egli fu costretto a salire su una nave e poi a gettarsi in mare quando l'imbarcazione aveva ormai preso il largo.

La scoperta degli irrazionali può a pieno titolo essere considerata ancora oggi una vera e propria rivoluzione concettuale, una delle più grandi e straordinarie di tutta la storia della matematica. In formule ( $D$  = diagonale,  $L$  = lato):

$$\frac{D}{L} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad (1.4)$$

Pitagora dimostrò questo enunciato ragionando per assurdo. Supponiamo che si possa scrivere:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (1.5)$$

dove  $m$  ed  $n$  sono due numeri interi primi fra loro (altrimenti li semplificherebbero). Elevando al quadrato entrambi i membri della (1.5), otteniamo:

$$2 = \frac{n^2}{m^2}, \quad \text{cioè: } n^2 = 2m^2 \quad (1.6)$$

Pertanto  $n^2$  è pari e quindi anche  $n$  è pari perché il quadrato di un numero dispari è dispari. Possiamo quindi scrivere:

$$n = 2p \quad (1.7)$$

Ma allora:

$$n^2 = 4p^2 \quad (1.8)$$

Ricordando la (1.6), abbiamo:

$$4p^2 = 2m^2 \quad \Rightarrow \quad 2p^2 = m^2 \quad (1.9)$$

ossia anche  $m$  è pari. Ma per ipotesi  $m$  ed  $n$  erano primi fra loro e quindi non possono essere entrambi pari. Siamo giunti quindi ad una contraddizione del nostro ragionamento per assurdo perché l'ipotesi sarebbe contemporaneamente vera e falsa e ciò viola un principio fondamentale della logica secondo cui una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.

Il numero espresso dalla radice quadrata di 2,  $\sqrt{2}$ , è un numero di tipo nuovo. Esso non può essere ottenuto come rapporto (*ratio*) tra due numeri interi. Fu così che Pitagora scoprì i numeri detti IRRAZIONALI. Si ha:

$$\sqrt{2} = 1,4142136\dots \quad (1.10)$$

dove i puntini indicano una successione di numeri, senza alcuna regolarità e senza sosta, fino all'infinito. In verità nessun uomo saprà mai quanto fa la  $\sqrt{2}$ . Quel

numero cioè che moltiplicato per se stesso darà un numero a noi molto familiare e apparentemente di grande semplicità: 2.

Il rapporto (1.4) segna una svolta nel pensiero matematico poiché fino a Pitagora si pensava che un qualunque numero non intero si potesse sempre scrivere come rapporto di due numeri interi. Pensiero che può sembrare legittimo se si nota che l'uomo ha a disposizione una infinità di numeri interi da dividere. Ecco la grande sorpresa: numeri non interi che **NON** possono essere ottenuti dividendo un numero intero per un altro numero intero. Siamo arrivati ad una conclusione che sfida qualunque strumento di misura. Comunque grande sia la precisione con cui si riesca a misurare il lato di un quadrato e la sua diagonale, il rapporto fra queste due lunghezze nessun uomo potrà mai conoscerlo, essendo questo rapporto un numero che non ha fine.

Gli arabi chiamavano i numeri irrazionali *assam* = sordo, perché gli irrazionali non si possono esprimere a parole e quindi non si possono "udire".

### 1.4.1 Il pi-greco.

Un altro esempio di numero irrazionale è il famoso pi-greco:  $\pi$ . I greci avevano scoperto che il rapporto tra la circonferenza ed il diametro di un cerchio non cambia mai: comunque si aumentino o diminuiscano le dimensioni del cerchio, quel rapporto è sempre lo stesso. Oggi il valore di  $\pi$  è noto con enorme precisione. Si tratta di un numero **IRRAZIONALE TRASCENDENTE**. Esso infatti è più irrazionale, se così ci si può esprimere, di  $\sqrt{2}$ . Il numero  $\sqrt{2}$  è soluzione dell'equazione:  $x^2 = 2$ .

Ad un numero irrazionale che può essere espresso come una soluzione di una equazione algebrica, e cioè un'espressione algebrica con un numero finito di termini, si dà il nome di **IRRAZIONALE ALGEBRICO**. Ci sono però numeri irrazionali che non possono essere la soluzione di un'equazione algebrica. In questo caso il numero viene chiamato **IRRAZIONALE TRASCENDENTE**. Che il famoso  $\pi$  fosse irrazionale trascendente, ci sono voluti quasi quattromila anni per capirlo. Che fosse irrazionale riuscì a dimostrarlo il matematico svizzero Johann Heinrich Lambert nel 1767. Ci sono poi voluti più di cent'anni per arrivare a dimostrare che quel numero irrazionale era di tipo "trascendente". Questa è la prova rigorosa che non sarà mai possibile trasformare l'area di una circonferenza nell'area di un quadrato (il famoso problema della *quadratura del cerchio*). La data in cui viene dimostrato che  $\pi$  è un numero irrazionale trascendente è il 1882, l'autore è Ferdinand Lindemann.

Nel 2000 a.C. i Babilonesi usavano già  $\pi$  e, per esso, avevano scelto il valore molto grossolano di  $31/8$ . Oggi  $\pi$  è noto, grazie ai computer, con mezzo milione di cifre decimali, senza che alcuna regolarità sia emersa: come deve essere per un numero che è irrazionale. Per pura informazione, riportiamo il valore di  $\pi$  con le prime **mille** cifre decimali:

$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445$   
923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446  
095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549  
303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669

234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815  
 209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519  
 415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623  
 799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860  
 213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184  
 676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684  
 409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608  
 640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317  
 328160963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710  
 100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687  
 311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111  
 95909216420199....

Lo ricordo ancora una volta: la serie di puntini, sta ad indicare una sequenza di cifre senza fine e senza alcuna regolarità (ossia senza periodo che si ripeta).

**1.4.2 Approssimazioni di  $\pi$ .**

Una curiosità può essere questa: come è possibile “calcolare”  $\pi$  con un numero arbitrario di cifre significative? A dire il vero, la cosa non è semplice ed esistono diversi metodi analitici (per es. attraverso le serie numeriche di Taylor, ossia particolari somme infinite) e geometrici adatti a questo scopo. In questa guida ne presenterò uno geometrico importante anche dal punto di vista storico. Esso si basa sull’idea che la lunghezza di una circonferenza possa essere approssimata bene quanto vogliamo, dal perimetro di un poligono regolare circoscritto o inscritto ad essa aumentandone i lati (triangolo, quadrato, pentagono, esagono, ....).

Prendiamo allora una circonferenza di raggio unitario ( $r=1$ ). Essa è lunga  $2\pi$  e se riusciamo ad approssimare la circonferenza con il metodo sopra descritto, allora approssimeremo anche il  $\pi$  calcolando la semicirconferenza.

**Poligoni inscritti.**

Già Archimede (287-212 a.C.) calcolò il perimetro di una successione di poligoni regolari *inscritti* in una circonferenza ciascuno con un numero di lati doppio del precedente. Partendo con il quadrato e passando via via all’ottagono, all’esadecagono ... ed indicando con  $l_4, l_8, l_{16}, l_{32}, l_{64}, l_{128}$  ... i loro lati, si ottiene dopo facili calcoli:

$$\begin{aligned}
 l_4 &= \sqrt{2}, & l_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}, & l_{16} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \\
 l_{32} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, & l_{64} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}, \\
 l_{128} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}, & & \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

In generale, si può dimostrare che il lato del poligono inscritto con  $2n$  lati dipende dal lato del poligono inscritto con  $n$  lati dalla seguente formula ricorsiva:

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}} \quad (1.12)$$

La (1.11) rappresenta una successione monotona crescente di numeri reali che fornisce per  $\pi$  la seguente successione ricorsiva:

$$\pi_{2n} = n \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \frac{\pi_n^2}{n^2}}} \quad (1.13)$$

che approssimata è: 2.8; 3.06; 3.12; 3.137; 3.140; 3.1413 ..... L'ultimo valore di  $\pi$  valido per il poligono inscritto di 128 lati è esatto a meno di 1 parte su diecimila.

### Poligoni circoscritti.

Un ragionamento simile può essere fatto per i poligoni regolari *circoscritti* alla circonferenza. Prendendo in esame sempre la successione di un quadrato, un ottagono, un esa-decagono .... Si ottiene:

$$l_4 = 2, \quad l_8 = 2(\sqrt{2} - 1), \quad l_{16} = 2 \left[ (2 + \sqrt{2}) \sqrt{2 - \sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2}) \right], \dots \quad (1.14)$$

e per  $\pi$ : 4; 3.31; 3.18 ... che rappresenta una successione monotona decrescente inferiormente limitata da  $\pi$ . In generale, si può dimostrare che il lato del poligono circoscritto con  $n$  lati dipende dal lato del poligono circoscritto con  $2n$  lati dalla seguente formula ricorsiva:

$$l_{2n} = 2 \left( \sqrt{1 + \frac{4}{l_n^2}} - \frac{2}{l_n} \right) \quad (1.15)$$

La (1.15) rappresenta una successione monotona decrescente di numeri reali che fornisce per  $\pi$  la seguente successione ricorsiva:

$$\pi_{2n} = 2n \left( \sqrt{1 + \frac{n^2}{\pi_n^2}} - \frac{n}{\pi_n} \right) \quad (1.16)$$

che approssimata è: 4; 3.314; 3.183; 3.152; 3.144; 3.1422 ..... L'ultimo valore di  $\pi$  valido per il poligono circoscritto di 128 lati è esatto a meno di 1 parte su cinquemila.

Più recentemente altri matematici si cimentarono nell'impresa. Ricordiamo **Francois Vietè**:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \dots$$

**Wallis** (il medico inglese decifratore di codici) ottenne la frazione:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots}$$

che ha il grande vantaggio di non contenere radicali.

Un'altra approssimazione viene da **William Brouncker**, il primo presidente della Royal Society, che utilizzò le frazioni continue:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

**Newton** scrisse ad uno dei suoi amici: "Non avendo altro da fare, in questi giorni ho calcolato le prime 16 cifre di  $\pi$ ." **John Machin** determinò per primo le prime 100 cifre decimali. **Leibniz** costruisce una somma infinita ricorrendo alla successione di numeri dispari:

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

Poi arriva **Leonard Euler (1770)**:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \\ \frac{\pi^2}{12} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \end{aligned}$$

Queste tre serie sono ottime per calcolare  $\pi^2$  perché convergono abbastanza velocemente in quanto il singolo elemento della successione tende a zero con l'inverso del suo quadrato. Eulero riuscì a determinare il valore delle serie riportate sopra grazie allo sviluppo in serie di Taylor del seno e del coseno poi uguagliati a zero:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad \sin z = 0 \Rightarrow z = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad \text{Si ottiene l'equazione}$$

algebrica:

$$0 = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad (z \neq 0). \text{ Dopo aver diviso per } z \text{ e chiamando } w=z^2 \text{ diventa:}$$

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} + \dots \quad \text{Per un noto teorema sulle equazioni algebriche, se il termine noto è } 1, \text{ allora la somma dei reciproci di tutte le soluzioni è il coefficiente del}$$

termine di primo grado cambiato di segno, ossia:  $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots$  che

opportunamente esplicitata fornisce il valore della prima serie di Eulero. Notiamo che storicamente né Leibniz né **Jacques Bernoulli**, due grandissimi matematici, riuscirono nell'impresa di Eulero di calcolare la serie dell'inverso dei quadrati.

Ancora Eulero trovò la seguente:

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \dots$$

dove i segni, dopo i primi due termini, viene stabilito in questo modo: se il denominatore è un numero primo della forma  $4m+1$  allora si mette il segno meno; se è un numero primo del tipo  $4m-1$  si usa il segno positivo; se il denominatore è un numero composto viene usato il segno indicato dal prodotto dei segni dei suoi componenti.

**Taylor**, scrivendo lo sviluppo in serie dell' $\arctg 1 = \pi/4$  ottenne la seguente:

Nel 1873 **William Shanks** stabilisce un primato impiegando 20 anni della sua vita a calcolare 707 decimali di  $\pi$ . Ma ... nel 1943 un certo **Ferguson** rifacendo i calcoli scoprì che la cifra 528° (un 9) era sbagliata e quindi erano sbagliate anche tutte le altre. Con l'avvento dei computer le cifre vennero calcolate a milioni.

Le 10000 cifre furono calcolate nel 1958, le 100000 nel '61, il milione nel '73, i 100 milioni nell'87 ed il miliardo nell'1989. Il record attuale è detenuto dal giapponese Yasumasa Kanada dell'Università di Tokyo che ha calcolato con il computer 6 miliardi di decimali nel 1996. Recentemente si è sparsa la voce che i fratelli russi Chunovsky a New York avessero calcolato  $\pi$  fino a 8 miliardi di decimali e che intendessero raggiungere i 1000 miliardi.

Non basterebbero tutti i libri della Terra che sono stati scritti e che mai si scriveranno per contenerlo. In  $\pi$  potremmo vederci contenuta tutta la Divina Commedia e tutta la Bibbia.

### 1.4.3 Il numero di Nepero (1596)-Eulero (1760).

Esiste almeno un altro numero IRRAZIONALE TRASCENDENTE degno di nota. Esso rappresenta la base dei logaritmi naturali (quelli che trovate indicati come  $\ln$  nelle vostre calcolatrici) e viene chiamato NUMERO DI NEPERO ed indicato dalla lettera  $e$ . Fu infatti il matematico Nepero ad introdurlo per primo.

Che cosa è  $e$ ?  $e$  è definito nel modo seguente:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (1.17)$$

prendendo per esempio  $n=10000$  otteniamo:

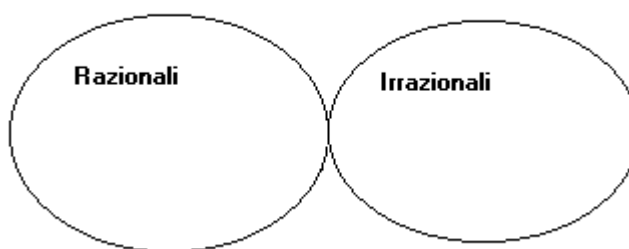
$$e \approx \left( 1 + \frac{1}{10000} \right)^{10000} = 2,71814592... \quad (1.18)$$

che dista dal valore vero del Numero di Nepero di circa 1 parte su 10000. Ovviamente se avessimo scelto per  $n$ , 100000 o 1000000 avremmo ottenuto un'approssimazione molto migliore ma, come al solito, non potremmo **mai** sapere con esattezza quanto vale  $e$ , perché esso è irrazionale.

### 1.4.4 I numeri Reali.

Ciò che noi chiamiamo numero reale, non è altro che un numero razionale o irrazionale:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I \quad (1.19)$$



### 1.5 I numeri immaginari e i numeri complessi.

Nei paragrafi precedenti, abbiamo passato in rassegna tutto il campionario dei numeri detti REALI, che ci sono noti. Ma anche così, ci rendiamo conto che resta ancora esclusa la possibilità di eseguire certe operazioni, come ad esempio quella d'estrazione di radice quadrata (o quarta, sesta ecc.) di un numero negativo, in quanto nessuno dei numeri visti finora, elevati ad una potenza pari, potrà mai dare un numero negativo (infatti  $(-1)^{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ).

(Per una più corretta introduzione dei n° complessi dal punto di vista storico, vedere l'Appendice B).

Abbiamo allora due alternative: o rinunciamo alla possibilità di calcolare le radici di indice pari dei numeri negativi o estendiamo il nostro concetto di numero, introducendo un nuovo soggetto numerico che chiameremo **numero immaginario**. Noi seguiremo la seconda strada e faremo in modo tale che le operazioni su questi nuovi numeri godano di tutte le proprietà formali già note delle operazioni fondamentali così da poter utilizzare senza alcuna variazione gli stessi procedimenti del calcolo algebrico ordinario che conosciamo.

Fuori dall'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali ci inventiamo quindi un nuovo numero chiamato **unità immaginaria** tale che:

$$i = \sqrt{-1} \quad (1.20)$$

sarà perciò:  $i^2 = (-i)^2 = -1$ .

#### 1.5.1 Proprietà dei numeri immaginari.

Le operazioni con i numeri immaginari, si svolgono in modo naturale applicando le stesse regole già note dell'algebra e tenendo conto che  $i^2 = -1$ .

**Esempi.**

$$5 \cdot i = 5i$$

$$0 \cdot i = 0$$

$$-\frac{3}{7} \cdot (-i) = \frac{3}{7}i$$

$$3i + 9i = (3 + 9)i = 12i$$

$$2i - 17i = (2 - 17)i = -15i$$

$$5i \cdot 11 = 55i$$

$$13i \cdot 3i = (13 \cdot 3)i^2 = -39$$

$$\frac{6i}{3i} = 2$$

$$\sqrt{-81} = \sqrt{(-1) \cdot 81} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{81} = i \cdot 9 = 9i$$

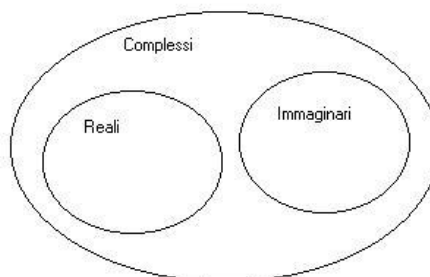
Notare che il prodotto ed il quoziente di 2 numeri immaginari è un numero REALE.

### 1.5.2 I numeri Complessi.

Siano  $a$  e  $b$  due numeri reali. Un numero scritto nel modo seguente:

$$z = a + bi \tag{1.21}$$

somma di un  $n^\circ$  reale più uno immaginario, viene chiamato **numero COMPLESSO**.  $a$  viene chiamata parte reale del numero complesso  $z$  e viene indicata come  $\Re(z)$ ,  $bi$  è detta parte immaginaria del numero complesso  $z$ .  $b$ , coefficiente della parte immaginaria, viene indicato come  $\Im(z)$ . Se  $b=0$ , il numero complesso (1.21) si riduce ad un semplice numero reale ( $a$ ), se è invece  $a$  ad essere nullo,  $z$  diventa un numero immaginario puro ( $bi$ ). Si può così affermare che sia l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  che quello degli immaginari puri  $I$ , sono due sottoinsiemi di  $\mathbb{C}$ , l'insieme dei numeri complessi (figura sottostante).



Si danno le seguenti definizioni:

- I) Due numeri complessi  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  sono uguali se e solo se:  $a=c$  e  $b=d$ . Non si possono confrontare due numeri complessi fra di loro per stabilire chi dei due sia il maggiore od il minore, perché nell'insieme dei numeri complessi non è definita una relazione d'ordine ( $\leq$ ) come in  $\mathbb{R}$ . Il

numero complesso nullo ( $z=0$ ) è quel numero che ha nulla sia la sua parte reale sia quella immaginaria, cioè:  $\Re(z) = \Im(z) = 0$

II) due numeri complessi che hanno la stessa parte reale ma parte immaginaria opposta, si dicono **complessi coniugati** come per esempio:

$$6 + 3i \quad \text{e} \quad 6 - 3i$$

$$-7 + \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad -7 - \sqrt{3}i$$

Il complesso coniugato di  $z$  si indica con  $\bar{z}$ .

III) due numeri complessi si dicono **opposti** quando hanno opposte sia la parte reale che quella immaginaria. Esempio.

$$x + yi \quad \text{e} \quad -x - yi$$

$$\sqrt{3} - 5i \quad \text{e} \quad -\sqrt{3} + 5i$$

### 1.5.3 Operazioni con i numeri complessi.

La somma e la differenza di due numeri complessi sono operazioni banali. Esempio:  
 $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (1 - i) = 2 + 3i$ . Vediamo più in dettaglio la moltiplicazione, il prodotto fra  $z$  e  $\bar{z}$  e la divisione.

#### Esempi.

$$1) z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} - i) \cdot (2 + \sqrt{3}i) = 2\sqrt{3} + 3i - 2i + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + i$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà distributiva della moltiplicazione e che  $i^2 = -1$ .

$$2) z = 2 + \sqrt{3}i \quad \Rightarrow \quad z \cdot \bar{z} = (2 + \sqrt{3}i) \cdot (2 - \sqrt{3}i) = 4 + 3 = 7$$

**Più in generale se  $z = a + bi$  allora  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ .**

$$3) \frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{3-i} = \frac{5+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{14+8i}{4} = \frac{7+4i}{2}$$

in cui abbiamo moltiplicato Numeratore e Denominatore per il complesso coniugato del Denominatore per ottenere sotto un numero reale e abbiamo applicato la 2).

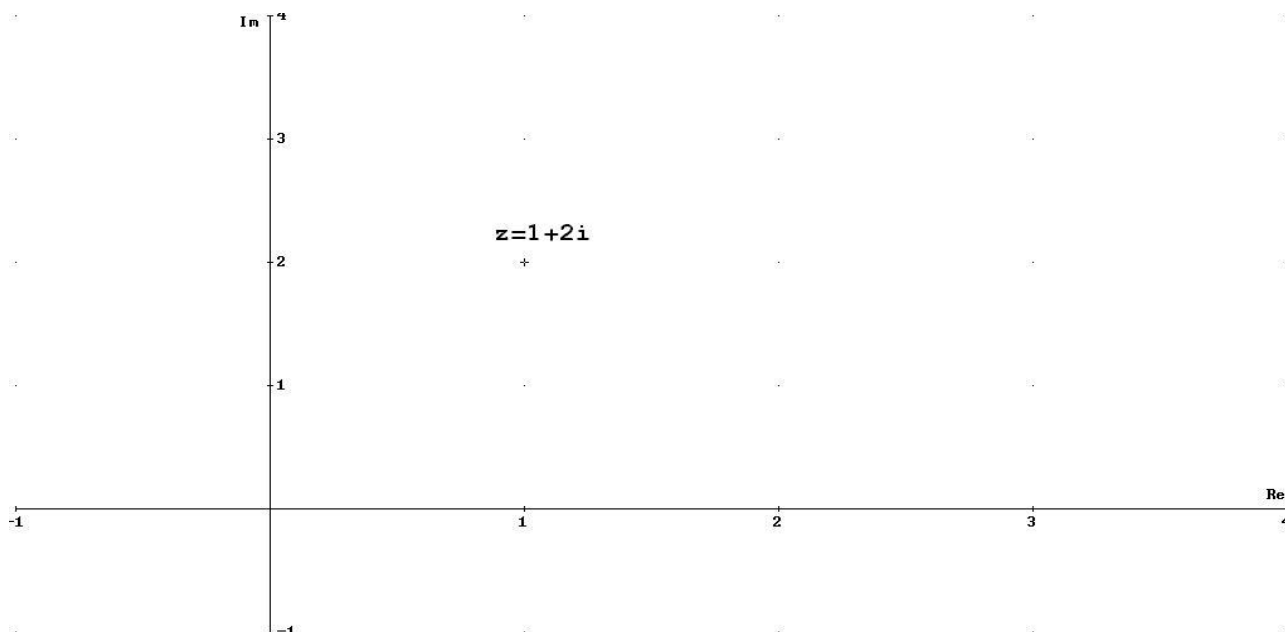
Curiosità. Consideriamo le potenze dell'unità immaginaria:  $i^0=1, i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$   
Vediamo come le potenze di  $i$  si ripetono dalla potenza 4 in poi, infatti:  $i^4 = i^0$ .  
Quindi una potenza intera qualunque di  $i$  può essere calcolata facilmente a seconda che il resto della divisione fra l'esponente e 4 sia 0, 1, 2, 3. Esempio.

$$i^{37} = i^{36+1} = i^{4 \cdot 9} \cdot i = i^0 \cdot i = 1 \cdot i = i \quad \text{perché } 36 \text{ è multiplo di } 4.$$

### 1.5.4 Il piano di Gauss.

Introduciamo ora un sistema di assi cartesiani ortogonali. Sull'asse  $x$  riportiamo l'insieme dei numeri reali, su quello  $y$  l'insieme dei numeri immaginari. Cosa

rappresenterà un punto del piano? Beh, sarà un numero con una parte reale ed una immaginaria, quindi un **numero complesso** (vedi figura).



Questo piano si chiama **piano di Gauss**. Congiungendo l'origine degli assi (0,0) con un punto del piano (cioè un numero complesso), otteniamo un segmento orientato o **VETTORE** che individua il n° complesso stesso. Un numero complesso, essendo individuato da un vettore nel piano di Gauss, può essere perciò determinato da un **modulo** e da una **direzione**, cioè dall'angolo che il vettore forma con l'asse delle x. Quale sarà il legame fra la rappresentazione cartesiana per componenti del tipo (1.21) dei numeri complessi e la rappresentazione polare ossia attraverso il modulo e la direzione? Esso è dato dalle stesse relazioni sui vettori, ossia dalle seguenti:

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} \end{cases} \quad (1.22)$$

dove  $r$  rappresenta il modulo del vettore (e quindi il **modulo del numero complesso**)  $z = a + bi$  nel piano di Gauss e  $\theta$  l'angolo che questo vettore forma con l'asse orizzontale. Il numero complesso  $z$  può quindi essere scritto come:

$$z = r(\cos\theta + \sin\theta \cdot i) = a + bi \quad (1.23)$$

lo si verifichi scrivendo  $\cos\theta$  e  $\sin\theta$  in funzione di  $\operatorname{tg}\theta$  riportata nella (1.22) ed al posto di  $r$  l'espressione sempre riportata nella (1.22).

Dalle formule riportate sopra possiamo ricavare le seguenti:

modulo di  $z$ :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$

$|z_1 - z_2| =$  distanza fra  $z_1$  e  $z_2$  (distanza fra 2 punti!).

$$z_1 = a_1 + b_1i, \quad z_2 = a_2 + b_2i \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \quad (1.24)$$

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 1 - i \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| = \sqrt{(1-1)^2 + (2+1)^2} = 3$$

### 1.5.5 Applicazione dei numeri complessi.

Sembrerà strano, ma i numeri immaginari ed i numeri complessi hanno un'incredibile varietà di applicazioni diverse, che spaziano dalla fisica alla matematica e all'ingegneria.

Esempi.

i) Il fisico e matematico Lorentz ha dimostrato all'inizio del 1900 che se vogliamo trattare lo spazio-tempo come uno spazio euclideo a 4 dimensioni (3 per lo spazio ed 1 per il tempo) esse non possono essere tutte reali ma se si sceglie lo spazio come reale, allora la dimensione del tempo deve essere immaginaria e viceversa. E' quello che è avvenuto nella **teoria della relatività ristretta di Einstein**. Cioè il *continuum quadridimensionale* dello spazio-tempo il cui quadrivettore posizione è  $x^\mu = (ict, \vec{x})$ , ha una natura ibrida, reale ed immaginaria...

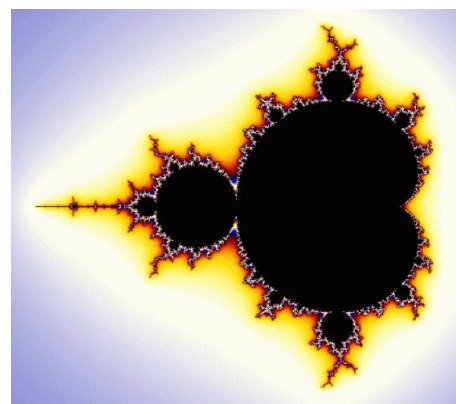
ii) L'equazione differenziale più importante della meccanica quantistica - e forse della fisica - detta **equazione di Schroedinger**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V\psi \quad (\text{che ci permette fra l'altro di capire come è fatto$$

l'atomo di idrogeno) è un'equazione immaginaria, dove cioè compare la  $i$ .

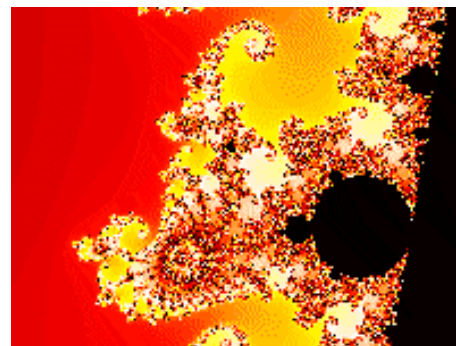
iii) I numeri complessi sono impiegati con successo nella risoluzione dei **circuiti elettrici** induttivi, capacitivi e resistivi a corrente variabile introducendo un formalismo compatto e semplificando i calcoli.

iv) I numeri complessi sono alla base dei **frattali**, figure geometriche importantissime che sembrano essere alla base di tantissimi fenomeni naturali come se fossero prototipi/archetipi su cui la natura si appoggia per costruire le sue forme: dalle coste marine alle nuvole, dalle montagne alle piante, dai polmoni ai cavoli ecc. La più importante figura frattale è l'insieme di Mandelbrot disegnato qui a fianco. Fra

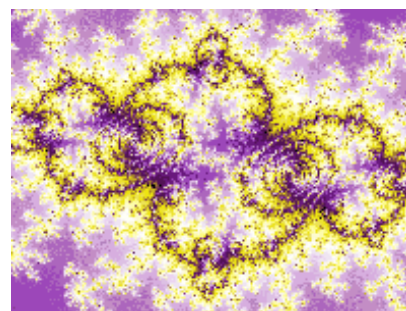


L'insieme di Mandelbrot

l'altro sono figure frattali alcuni dei cosiddetti crop-circles o cerchi nel grano (di origine ancora misteriosa) che appaiono spesso ed improvvisamente nei campi di grano di tutto il mondo senza una spiegazione plausibile. L'insieme di Mandelbrot si ottiene iterando l'operazione complessa:  $z = z^2 + c$  con il valore iniziale  $z=0$  e variando  $c$  in una finestra fra  $-2 < \text{Re}(c), \text{Im}(c) < 2$ . Se, dopo un certo numero di iterazioni prefissato,  $|z| > 2$  si colora il punto di giallo, altrimenti di nero. Molto interessanti sono anche gli **insiemi di Julia** che si ottengono sempre iterando l'espressione precedente ma questa volta tenendo fisso  $c$  e variando  $z$ . Si potrebbe dire che ogni punto dell'insieme di Mandelbrot corrisponde ad un insieme di Julia. In questo senso l'insieme di Mandelbrot funge da catalogo per gli insiemi di Julia. Il confine dell'insieme di Mandelbrot poi, segna la distinzione fra gli insiemi di Julia connessi da quelli sconnessi.



*Un dettaglio dell'insieme di Mandelbrot mette in evidenza come la parte riproduca il tutto.*



*Un esempio di un insieme di Julia.*

### 1.6 Conclusione.

In questi paragrafi, abbiamo approfondito le nostre conoscenze sui numeri. Abbiamo visto che i numeri non sono "tutti uguali", nel senso che non sono tutti dello stesso tipo; abbiamo anzi visto che essi possono essere divisi in cinque insiemi diversi per proprietà e caratteristiche, rivediamoli:

Tipo di numero	Insieme	Esempi
Naturale	$\mathbb{N}$	1, 15, 988, 1020471981169231812
Intero relativo	$\mathbb{Z}$	-3, 0, -98716, 198
Razionale	$\mathbb{Q}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{36}, -\frac{1987}{187}$
Irrazionale algebrico	$I$	$\sqrt{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{5}$
Irrazionale trascendente		$\pi, e, \ln 2$
Immaginario puro	$\mathfrak{I}$	$i, -3i, \sqrt{2}i$
Complesso	$\mathbb{C}$	$1+i, -2i, 5i-1$

**Tabella 2**

## **2. Contiamo i numeri**

### **2.1 Introduzione.**

Nel capitolo precedente, abbiamo elencato i diversi tipi di numeri reali e abbiamo visto che essi possono essere divisi in 4 insiemi diversi:  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{I}$ , a seconda delle loro diverse proprietà. Ma ha senso contarli? Ha senso dire “quanti sono” i numeri presenti in ogni insieme?

Una prima risposta intuitiva potrebbe essere: “Non ha senso contare quanti sono i numeri di ciascun insieme, perché ogni insieme ne contiene infiniti”.

Un'altra domanda potrebbe essere allora: “C'è la possibilità di confrontare fra loro due o più insiemi infiniti? Esistono cioè degli insiemi infiniti più grandi di altri insiemi infiniti?”

Sono domande queste, che non si pone l'uomo comune, che in tutta la sua vita non incontra mai delle quantità infinite, ma solo finite, magari grandi, grandissime ma sempre finite. Pensiamo per esempio ad un economista cui gli venisse chiesto di stimare il debito pubblico italiano: egli risponderebbe all'incirca  $\text{£ } 2 \cdot 10^{15}$  (2 milioni di miliardi) che rappresenta un numero enorme, ma certamente non infinito (altrimenti poveri italiani!).

Oppure pensiamo anche ad un astronomo cui gli venisse chiesto di dire quante sono le stelle dell'Universo. Ebbene, anche se con molta approssimazione egli potrebbe rispondere:  $10^{23}$  che è un numero gigantesco (1 seguito da 23 zeri) ma non infinito.

Addirittura Archimede contò per i suoi contemporanei quanti granelli di sabbia ci starebbero dentro tutto l'Universo allora conosciuto (le dimensioni erano state calcolate da Aristarco di Samo). Era un numero immenso, ma finito, non infinito!

Si potrebbe continuare con altri esempi del genere.

Essi stanno solo a dimostrare che l'infinito non appartiene alla nostra sfera di vita materiale contingente ma a quella degli oggetti puramente mentali cui l'uomo arriva solo con un processo di astrazione concettuale che lo conduce in modo assoluto al di sopra di tutte le esperienze mentali. Di tutti questi oggetti mentali, il più straordinario è l'INFINITO. I suoi livelli. Le sue classi. La sua logica. Le sue leggi.

### **2.2 Il paradiso di Cantor.**

Sicuramente il matematico che ha prodotto più risultati sulle proprietà degli insiemi infiniti è il tedesco G. Cantor.

Descriveremo ora alcuni semplici ma importantissimi risultati di Cantor relativi alla cardinalità degli insiemi numerici.

Diamo la seguente definizione di equipotenza.

Due insiemi  $E$  ed  $F$  si dicono **equipotenti** quando esiste tra loro una corrispondenza biunivoca; ossia una legge che associa ad ogni elemento di  $E$ , un elemento di  $F$  e viceversa.

Sugli insiemi finiti c'è poco da dire: due insiemi finiti sono equipotenti se e solo se hanno lo stesso numero di elementi. L'interesse è rivolto ai soli insiemi infiniti.

Per questi si hanno dei risultati che a prima vista sembrano paradossali; già Galileo osservava che ogni numero intero ha il suo quadrato e che quindi i numeri naturali formano un insieme equipotente ad una sua parte, quella dei quadrati perfetti.

*"...io non veggo a che altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale, maggiore e minore non aver luogo negl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate." Opere di Galileo, vol. 8, pag. 79.*

Dopo il grande matematico Dedekind, il fatto che un insieme possa essere equipotente ad una sua parte, lungi dall'essere paradossale, costituisce la definizione stessa di insieme infinito.

In un certo senso, l'insieme  $\mathbf{N}$  dei numeri naturali è il più piccolo insieme infinito. Infatti, come ha dimostrato Dedekind, ogni insieme infinito  $A$ , contiene un sottoinsieme equipotente ad  $\mathbf{N}$ . La dimostrazione è semplice. Prendiamo un elemento  $a_1$  di  $A$ ; dato che  $A$  è infinito, conterrà un secondo elemento  $a_2$  diverso da  $a_1$ . Per lo stesso motivo ci sarà un terzo elemento  $a_3$  diverso da  $a_1$  e  $a_2$ , ecc. La sequenza di elementi  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  costituisce un sottoinsieme di  $A$ , equipotente all'insieme dei numeri naturali.

Gli insiemi equipotenti ad  $\mathbf{N}$  si dicono **numerabili**; i loro elementi cioè si possono numerare, contare, e si possono mettere in una sequenza  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  dove  $a_k$  è l'elemento corrispondente al numero  $k$ .

Non è difficile vedere che se  $A$  e  $B$  sono due insiemi numerabili, la loro unione è ancora numerabile. Infatti i suoi elementi si possono scrivere in una successione, prendendo alternativamente un elemento da  $A$  ed uno da  $B$ :  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ . In modo simile si potrebbe pensare di associare gli elementi di  $\mathbf{N}$  con quelli di  $A$  e  $B$  così: ai numeri dispari associo gli elementi di  $A$ , a quelli pari quelli di  $B$ . La funzione è biunivoca, perciò  $\mathbf{N}$  è equipotente ad  $A \cup B$ . In particolare è numerabile l'insieme  $\mathbf{Z}$  visto come l'unione di  $\mathbf{N}$  e  $-\mathbf{N}$  ( $A$  l'insieme dei numeri interi negativi,  $B$  quello degli interi positivi). Analogamente si può proceder per 3 o più insiemi.

Più difficile è dimostrare che l'unione di una infinità numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile. Il modo seguito per la dimostrazione è quello "diagonale" rappresentato nella figura sottostante o analogamente quello a spirale.

Una conseguenza di questo straordinario risultato è che  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  (il prodotto cartesiano di  $\mathbf{Z}$  per sé stesso) e  $\mathbf{Q}$  sono numerabili. Infatti possiamo mettere nella prima riga (cioè

nell'insieme  $A_1$ ) le frazioni con denominatore 1, nella seconda quelle con denominatore 2, e così via, e poi metterle in relazione con i numeri naturali con il procedimento appena visto.

**Il metodo Diagonale di Cantor.**

Una volta ottenuto questo primo risultato, Cantor si chiese se anche i numeri reali fossero numerabili. In questo caso la risposta è negativa!

Per dimostrarlo scriviamo i numeri reali compresi fra 0 e 1 come decimali illimitati (eventualmente scrivendo 0,35 nella forma 0,3500000000...), e supponiamo per assurdo che sia possibile numerarli, metterli cioè tutti in successione:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\
 r_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\
 r_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\
 &\dots \\
 r_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

Definiamo ora un numero reale  $r$  come segue. La parte intera sia 0 in modo che  $r=0, \dots$ . Per la prima cifra decimale di  $r$  andiamo a guardare la prima cifra decimale di  $r_1$  e la prendiamo diversa da essa (per esempio se  $a_{11} = 2$ , noi scegliamo 7); per la seconda cifra decimale di  $r$ , guardiamo la seconda cifra decimale di  $r_2$  e la prendiamo diversa (per esempio se  $a_{22} = 9$ , noi scegliamo 3); procediamo così sempre allo stesso modo per tutte le cifre decimali di  $r$ . E' ovvio che  $r$  sarà diverso da  $r_1$  perché differiscono almeno nella prima cifra decimale; sarà diverso da  $r_2$  perché differisce da esso almeno nella seconda cifra e così via. Quindi  $r$  è diverso da tutti i numeri che abbiamo elencato nella (1.25). Ma questo è assurdo perché essi sono tutti i numeri reali compresi fra 0 e 1 e quindi fra essi dovrebbe esserci anche il nostro  $r$ . Quindi l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1 (e a maggior ragione tutti i numeri reali) non è numerabile.

Intuitivamente, il risultato precedente ci dice che i numeri reali sono molti di più dei numeri naturali, e anche molti di più delle frazioni.

A questo punto Cantor cercò di dimostrare che in maniera analoga i punti di un quadrato erano molti di più di quelli del suo lato (ossia che non fossero equipotenti), con l'idea di fondare in questo modo il concetto di dimensione. Con sua grande sorpresa si accorse che le cose non stavano affatto così: il quadrato costruito sull'intervallo 0-1 è equipotente a quest'ultimo. Cantor rimase talmente stupefatto da questa dimostrazione che scrisse a Dedekind: "lo vedo ma non ci credo".

A parte qualche dettaglio tecnico, la dimostrazione si può fare scrivendo come sopra i punti dell'intervallo 0-1 come decimali infiniti, e i punti del quadrato di lato 1 come coppie  $(x,y)$ . A ogni punto  $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$  dell'intervallo si può far corrispondere il punto  $(x,y)$  del quadrato, con la regola:

$$x = 0, a_1 a_3 a_5 \dots \quad \text{e} \quad y = 0, a_2 a_4 a_6 \dots$$

Viene così stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'intervallo e quelli del quadrato, che quindi risultano equipotenti.

### 2.3 Sintesi sui livelli di infinito.

Quanto abbiamo visto finora può essere sintetizzato dicendo che esistono almeno due livelli di infinito di potenza diversa, cioè non equipotenti: l'infinito del **NUMERABILE** (o quantizzato) e l'infinito del **CONTINUO**. Al primo appartengono l'insieme dei numeri naturali e tutti gli insiemi ad esso equipotenti (abbiamo visto **Z**, **ZxZ**, **Q**, ecc.); al secondo appartengono l'insieme dei numeri reali **R** e tutti gli insiemi ad esso equipotenti (abbiamo visto per es. qualunque tratto di retta tipo l'intervallo [0-1], l'insieme dei punti di una superficie piana ecc.). La potenza del numerabile viene chiamata ALEPH ZERO (leggi alef; aleph è la lettera A in ebraico), quella del continuo invece ALEPH UNO.

Cantor scopre poi che di livelli di infinito non ne esistono solo due (numerabile e continuo) ma, e poteva essere diverso!, infiniti (numerabili), la cui successione è riportata schematicamente nella figura sottostante.

**2.4 L'ipotesi del continuo.** Un grosso problema che Cantor si trovò ad affrontare durante lo studio delle proprietà degli insiemi, fu quello di capire se fra il livello di infinito zero (aleph0) e quello successivo, l'uno (aleph1), ci fossero altri livelli di infinito intermedi. Cantor, non sapendolo dimostrare, scelse questa affermazione come ipotesi di lavoro. Proprio negli ultimi anni, e precisamente nel 1940, un grande matematico Goedel, ha dimostrato in modo rigoroso che per una classe particolare di insiemi infiniti detti "costruibili" l'ipotesi di Cantor, detta anche IPOTESI DEL CONTINUO, è vera. Nel 1963, Cohen scopre che per gli insiemi infiniti "non costruibili", ciò che Cantor aveva intuito e ipotizzato non vale.

Oggi esiste quindi sia la Matematica Cantoriana, sia la Matematica non-Cantoriana. Il paradiso dell'Infinito Matematico – come Hilbert amava definire l'opera di Cantor ("... nessuno ci scaccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi ...") – non è stato distrutto, ma esteso nei suoi orizzonti concettuali, su nuove frontiere, ancora più affascinanti.

**2.5 Radiografia dei numeri reali.** Alla fine di questo viaggio nell'infinito, ci poniamo una semplice domanda: "Se i numeri reali sono infiniti di livello Aleph1, da dove viene questa potenza di infinito?" In altri termini: "Quale degli insiemi che compongono i numeri reali presenti nella Tabella 2 ha questa potenza di infinito?" Una risposta ci deve essere perché sappiamo già che l'unione di insiemi numerabili, fornisce ancora e solo un insieme numerabile e quindi di potenza Aleph0, non Aleph1. Dalla **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** possiamo escludere certamente **N** che è il prototipo (il più "piccolo") fra tutti gli insiemi numerabili, **Z** e **Q** perché equipotenti ad **N**. Ci rimane solo l'insieme dei numeri

irrazionali che deve perciò avere lui la cardinalità di  $\aleph_1$ . Ma non basta. L'insieme dei numeri irrazionali, l'abbiamo diviso fra numeri irrazionali algebrici (quelli che vengono fuori da soluzioni di equazioni polinomiali algebriche a coefficienti interi) ed irrazionali trascendenti: quali fra questi due è quello più potente? Beh, sembrerà strano ma è proprio l'insieme dei numeri irrazionali trascendenti a conferire a tutto  $\mathbf{R}$  la cardinalità di  $\aleph_1$ !! L'insieme costituito da tutti quei numeri che non ci verrebbe mai in mente di immaginare quando pensiamo ad un numero qualunque, è anche l'insieme di gran lunga più grande di tutti gli altri! Le sorprese non finiscono mai.

## Appendice A

I numeri sono stati probabilmente i primi oggetti matematici inventati dall'uomo. Essi sono nati verosimilmente dall'operazione del contare. Ogni numero era generato dal ripetersi di un atto semplice come tracciare un segno; la grandezza, o se si vuole la cardinalità, del numero, rifletteva la molteplicità delle azioni elementari.

Ancora una volta gli Elementi di Euclide, conservano e ci consegnano tracce di questo procedimento. Dopo aver introdotto l'unità:

*"L'unità è quella, per cui ciascuna delle cose che sono si dice una",*

Euclide definisce numero:

*"Il numero è moltitudine di unità".*

Nella seconda metà dell'Ottocento, si producono due fatti importanti. Da una parte la dimostrazione per induzione, che in precedenza occupava un ruolo tutto sommato secondario e inessenziale, assume un posto rilevante tra i metodi dimostrativi; dall'altra se ne coglie la peculiarità rispetto alle dimostrazioni usuali, essendo l'unica che consente di dimostrare simultaneamente un numero infinito di proposizioni singole. Ambedue questi aspetti, quello tecnico dell'acquisizione di un potente metodo dimostrativo e quello epistemologico della consapevolezza della sua originalità, passano in primo luogo per una formulazione esatta del **Principio di Induzione**.

Di ciò è ben consapevole H. Poincaré, che nei suoi scritti divulgativi insiste molto sul ruolo centrale occupato nella matematica moderna dai procedimenti induttivi, nei quali egli vede la differenza principale tra la logica matematica e quella aristotelica basata sul sillogismo. Per Poincaré, il principio di induzione, è un vero "giudizio sintetico a priori" di tipo kantiano, irriducibile al principio "analitico" di non contraddizione; esso costituisce "un'intuizione diretta dello spirito, anzi, l'affermazione di una proprietà dello spirito".

Solo grazie al principio di induzione possono essere poste in forma rigorosa dimostrazioni che in altri tempi erano ritenute soddisfacenti, ma che non obbediscono ai nuovi canoni di rigore che si andavano affermando alla fine dell'Ottocento.

Grazie a questo principio, **Giuseppe Peano** fu il primo a definire in modo assiomatico il **sistema numerico**. Egli propose questi cinque assiomi:

- i. 1 è un numero.
- ii. Il successivo di un numero è un numero.
- iii. 1 non è successivo di nessun numero.
- iv. Se i successivi di due numeri sono uguali, anche i due numeri sono uguali.
- v. Se un insieme  $A \subset \mathbb{N}$  contiene l'1 ed il successivo di ogni suo elemento, allora  $A = \mathbb{N}$ .

In questo modo, l'insieme dei numeri naturali è un insieme non vuoto (per l'assioma i contiene almeno l'1), nel quale si può contare senza giungere mai alla fine (assioma ii: ogni elemento ha un successivo), e senza tornare mai né all'1 (assioma iii), né ad

un numero già incontrato (assioma iv). Infine l'ultimo assioma, equivalente al principio di induzione, garantisce che a forza di contare si raggiungano tutti i numeri naturali; tutte proprietà logiche, "naturali", ma solo ora definite con precisione.

Noteremo solo due cose. In primo luogo, la prevalenza della nozione di successivo al posto di quella euclidea di molteplicità; uno spostamento dalla cardinalità all'ordinalità. Ma quello che è più importante, nel nuovo oggetto, c'è solo un posto marginale per il numero isolato, moltitudine di unità. Quello che conta è il *sistema numerico* nella sua totalità; solo in questo sistema globale si può enunciare la proprietà di induzione, che ne fa il cardine delle dimostrazioni matematiche.

**Alla fine di questo processo, sotto il nome di uno degli oggetti più antichi della matematica, il numero intero, è sorto un oggetto completamente rinnovato: il sistema dei numeri naturali.**

## Appendice B

Quelli che oggi chiamiamo numeri complessi, traggono origine dalla soluzione delle equazioni algebriche; non come a volte si dice della volontà di dare soluzioni anche a equazioni, come ad es.  $x^2 + 1 = 0$ , che non ne hanno, ma per esprimere le soluzioni di equazioni di terzo grado. Data l'equazione di terzo grado:

$$x^3 - 3px - 2q = 0 \quad (1.26)$$

una sua soluzione è data dalla formula di Cardano – Del Ferro:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (1.27)$$

Ad un esame di questa formula, salta subito agli occhi una difficoltà. Se  $q^2 - p^3$  è negativo la (1.27) non permette di trovare la soluzione. Questa situazione si verifica effettivamente ad esempio nell'equazione:

$$x^3 - 9x + 8 = 0 \quad (1.28)$$

in cui  $p = 3$  e  $q = -4$ , si trova:  $q^2 - p^3 = -11$ . D'altra parte l'equazione (1.28) si può risolvere esplicitamente, se si osserva che  $x=1$  è una radice e pertanto risulta:

$$x^3 - 9x + 8 = (x-1)(x^2 + x - 8) \quad (1.29)$$

Le altre due radici si ottengono allora dall'equazione di secondo grado che fornisce i

valori:  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$ .

Abbiamo dunque una situazione paradossale: da una parte l'equazione ha tre radici reali che nel nostro caso si possono calcolare esplicitamente, dall'altra la formula risolutiva non è in grado di darcene nemmeno una, a meno che non si dia un senso alle radici di numeri negativi. Siamo in presenza del *caso irriducibile* dell'equazione di terzo grado, chiamato così perché la sua soluzione non può essere ricondotta semplicemente al calcolo dei radicali, che ha fatto discutere per più di due secoli.

Il primo che tentò di dare un senso al caso irriducibile fu il matematico bolognese Raffaele Bombelli nel 1572. Egli introdusse nuovi segni algebrici ("*più di meno*" e "*meno di meno*"), e nuove regole di moltiplicazione fra questi segni.

Ai nostri occhi è facile identificare le espressioni quali "*3 più di meno 2*" nella forma  $3+2i$  e vedere nelle regole dei segni quelle della moltiplicazione tra numeri complessi. La realtà storica è però ben diversa: Bombelli non ha introdotto dei nuovi numeri, ma delle nuove "radici cubiche legate", che si manipolano secondo le nuove regole dei segni. Bombelli riesce a dare un senso alle radici di numeri negativi, ma si arresta davanti alle radici cubiche delle nuove combinazioni numeriche.

I nuovi numeri (che non ci sono ancora) si ripresentano alcuni decenni più tardi in una forma diversa, ma sempre legati alle radici delle equazioni. Non si tratta più di dare senso alla formula di Cardano, ma di rispondere a un altro quesito: quante radici ha un'equazione di grado  $n$ ? In alcuni casi ce ne erano esattamente  $n$ , ad es.

l'equazione  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ . Altre volte invece ce ne potevano essere di meno:  $x^2 + 1 = 0$  non ha soluzioni reali.

Davanti a questa situazione, Descartes (Cartesio) enuncia il **TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA**: ogni equazione algebrica di grado  $n$  ha  $n$  soluzioni, ma aggiunge che esse

*"... non son sempre reali, ma talvolta soltanto immaginarie; cioè è sempre possibile immaginarne in ogni equazione tante quante ho detto, ma talvolta non ve n'è nessuna quantità che corrisponde a quelle che immaginiamo. Così, nonostante che nell'equazione  $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$  sia possibile immaginare tre radici, non ve n'è che una che sia reale, cioè 2."*

Il termine immaginario di Cartesio, bisogna intenderlo alla lettera più che nel senso odierno. C'erano però degli esempi che ne suggerivano la forma. Ad esempio l'equazione  $x^2 + 1 = 0$  ha formalmente le soluzioni  $x = \pm\sqrt{-1}$ ; mentre l'equazione  $x^2 - 2x + 5 = 0$  ha soluzioni  $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{-1}$ . Le radici immaginarie delle equazioni di secondo grado sono dunque della forma  $a + b\sqrt{-1}$  che oggi ha assunto l'aspetto consueto di  $a + bi$ .

## **Bibliografia.**

1. **"Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici"**, E. Giusti Bollati Boringhieri.
2. **"Infinito"**, A. Zichichi.