Chi è pi-greco?

E’ uno dei numeri irrazionali trascendenti più importanti di tutta la matematica.

Che fosse irrazionale trascendente, ci sono voluti quasi quattromila anni per capirlo. Che fosse *irrazionale* riuscì a dimostrarlo il matematico svizzero **Johann Heinrich Lambert nel 1767**. Ci sono poi voluti più di altri cent’anni per arrivare a dimostrare che quel numero irrazionale era di tipo *trascendente*. Questa è la prova rigorosa che non sarà mai possibile trasformare l’area di una circonferenza nell’area di un quadrato (uno dei tre famosi problemi dell’antichità assieme alla duplicazione di un cubo e la trisezione di un angolo). La data in cui viene dimostrato che π è un numero irrazionale trascendente è il **1882**, l’autore è **Ferdinand Lindemann**.

Nell’antichità, i babilonesi usavano per π l’approssimazione di 22/7, mentre **Archimede** (287-212 a.C.) con un metodo molto ingegnoso trovò che $3+10/71 < \pi < 3+10/70=22/7$, un ottimo risultato. Successivamente sempre Archimede, attraverso il calcolo dei perimetri inscritti e circoscritti ad un cerchio di raggio r=1 (e quindi circonferenza c=2π), riuscì a trovare le formule ricorsive per i poligono di 4, 8, 16, 32, 64, 128 lati:

INSCRITTI

$$l_4=\sqrt{2},\quad l_8=\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad l_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$l_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\quad l_{64}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},$$

$$l_{128}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}},\quad ....$$

e quindi per π:

$$\boxed{\pi \approx 64\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} \approx 3.1413}$$

CIRCOSCRITTI

$$l_4=2,\quad l_8=2\left(\sqrt{2}-1\right),\quad l_{16}=2\left[\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}-\left(1+\sqrt{2}\right)\right], ...$$

Più recentemente altri matematici si cimentarono nell’impresa. Ricordiamo **Francois Vietè**:

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\ .....$$

Wallis (il medico inglese decifratore di codici) ottenne la frazione:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot ....}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot ....}$$

che ha il grande vantaggio di non contenere radicali.

Un’altra approssimazione viene da **William Brouncker**, il primo presidente della Royal Society, che utilizzò le frazioni continue:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+...}}}}$$

Newton scrisse ad uno dei suoi amici: “*Non avendo altro da fare, in questi giorni ho calcolato le prime 16 cifre di* π.” **John Machin** determinò per primo le prime 100 cifre decimali. **Leibniz** costruisce una somma infinita ricorrendo alla successione di numeri dispari:

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+.....$$

Poi arriva **Leonard Euler (1770)**:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+....$$

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+....$$

Queste tre serie sono ottime per calcolare π^2 perché convergono abbastanza velocemente in quanto il singolo elemento della successione tende a zero con l’inverso del suo quadrato. Eulero riuscì a determinare il valore delle serie riportate sopra grazie allo sviluppo in serie di Taylor del seno e del coseno poi uguagliati a zero:

$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...$ $\quad \sin z = 0 \Rightarrow z=\pi, 2\pi, 3\pi,...$ Si ottiene l’equazione algebrica:

$0 = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...$ $\quad (z\neq 0)$. Dopo aver diviso per z e chiamando w=z^2 diventa:

$0=1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}+...$ Per un noto teorema sulle equazioni algebriche, se il termine noto è 1, allora la somma dei reciproci di tutte le soluzioni è il coefficiente del termine di primo grado cambiato di segno, ossia: $\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+...$ che

opportunamente esplicitata fornisce il valore della prima serie di Eulero. Notiamo che storicamente né Leibniz né **Jacques Bernoulli**, due grandissimi matematici, riuscirono nell’impresa di Eulero di calcolare la serie dell’inverso dei quadrati.
Ancora Eulero trovò la seguente:

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} ....$$

dove i segni, dopo i primi due termini, viene stabilito in questo modo: se il denominatore è un numero primo della forma *4m+1* allora si mette il segno meno; se è un numero primo del tipo *4m-1* si usa il segno positivo; se il denominatore è un numero composto viene usato il segno indicato dal prodotto dei segni dei suoi componenti.
Taylor, scrivendo lo sviluppo in serie dell’arctg1=π/4 ottenne la seguente:

Nel 1873 **William Shanks** stabilisce un primato impiegando 20 anni della sua vita a calcolare 707 decimali di π. Ma … nel 1943 un certo **Ferguson** rifacendo i calcoli scoprì che la cifra 528° (un 9) era sbagliata e quindi erano sbagliate anche tutte le altre. Con l’avvento dei computer le cifre vennero calcolate a milioni.
Le 10000 cifre furono calcolate nel 1958, le 100000 nel ’61, il milione nel ’73, i 100 milioni nell’87 ed il miliardo nell’1989. Il record attuale è detenuto dal giapponese Yasumasa Kanada dell’Università di Tokyo che ha calcolato con il computer 6 miliardi di decimali nel 1996. Recentemente si è sparsa la voce che i fratelli russi Chunovsky a New York avessero calcolato π fino a 8 miliardi di decimali e che intendessero raggiungere i 1000 miliardi.

Non basterebbero tutti i libri della Terra che sono stati scritti e che mai si scriveranno per contenerlo. In π potremmo vederci contenuta tutta la Divina Commedia e tutta la Bibbia. Per pura curiosità, riportiamo il valore di π con le <u>**sole**</u> prime 1000 delle infinite cifre decimali non periodiche:

π =**3.14**1592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
4592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844
6095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549
3038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692
3460348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520
9209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415
1160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996
2749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394
9463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694
0513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122
4953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418
1598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963
1859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783
8752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863
8823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201
99………………………………………