Poligoni regolari

Un poligono regolare di n lati può essere scomposto in n triangoli isosceli uguali, ciascuno dei quali ha per base un lato del poligono, per altezza l'apotema ossia il raggio del cerchio inscritto ad esso e come lati uguali il raggio del cerchio circoscritto ad esso. L'angolo al vertice di ciascun triangolo vale:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \tag{1.1}$$

mentre gli angoli (uguali) alla base di questi triangoli valgono esattamente:

$$\frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-2}{n}\right) \tag{1.2}$$

Per trovare il centro del cerchio inscritto (detto ***incentro***) basta determinare l'intersezione di due bisettrici degli angoli interni di questo poligono. Questo centro coincide anche con il centro del cerchio circoscritto (detto ***circocentro***) che si ottiene intersecando almeno due assi dei lati del poligono.

Area e perimetro di un poligono regolare.

1) Area.

Per quanto detto sopra, l'area di un poligono regolare si può determinare calcolando l'area di uno degli *n* triangoli isosceli e moltiplicando questo valore per *n*. Si ottiene:

$$A_n = n\frac{bh}{2} = n\frac{la}{2} = pa \tag{1.3}$$

dove con *a* è indicato l'apotema e con *p* si è indicato il semiperimetro del poligono regolare ossia *nl/2*.
Con un semplice calcolo trigonometrico, si può esprimere l'apotema *a* in funzione del lato del poligono e dell'angolo alla base del poligono regolare; si ottiene:

$$a = \frac{l}{2\tan\frac{\pi}{n}} \tag{1.4}$$

e quindi si ottiene per l'area del poligono regolare:

$$A_n = pa = p\frac{l}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{p^2}{n\tan\frac{\pi}{n}} \tag{1.5}$$

2) Perimetro.
L'area determinata al punto precedente rappresenta quella di un poligono regolare circoscritto ad una circonferenza di raggio = all'apotema *a*. Per quanto riguarda il perimetro di un tale poligono si avrà:

$$2p = nl = 2na\tan\frac{\pi}{n} \tag{1.6}$$

dove a è sempre l'apotema.
Nel caso la circonferenza avesse diametro=1 e quindi r=a=1/2 la (1.6) diventerebbe:

$$2p_n = n\tan\frac{\pi}{n} \qquad \text{(Poligoni circoscritti)} \tag{1.7}$$

Questa successione è importante perché ci permette di approssimare il π bene quanto vogliamo a patto di aumentare il numero n dei lari del poligono. Infatti quando $n \to \infty$ $2p_n \to \pi$ essendo la lunghezza di una circonferenza con diametro unitario.
Si può dimostrare che per i poligoni inscritti valgono considerazioni analoghe. Per essi si ottiene:

$$2p_n = n\sin\frac{\pi}{n} \qquad \text{(Poligoni inscritti)} \tag{1.8}$$

Anche questa successione converge a π.

Qual è il poligono regolare che a parità di area ha il perimetro minore?

Dalla (1.5) fissiamo l'area A_n chiamandola *A* e ricaviamo p^2. Avremo:

$$p^2 = nA\cdot\tan\frac{\pi}{n} \tag{1.9}$$

Sviluppando in serie di Taylor la tangente otteniamo:

$$p^2 = nA\cdot\tan\frac{\pi}{n} = nA\cdot\left(\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = A\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.10}$$

Si vede così che il quadrato del semiperimetro è una funzione decrescente di *n* e si otterrà il minimo valore di *p* quando $n \to \infty$.
Un altro modo di giungere alla stessa conclusione, consiste nel derivare la (1.9) e trovare il punto di minimo. Calcolando la derivata si ottiene:

$$\frac{dp^2}{dn} = A\left[\tan\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n\cos^2\frac{\pi}{n}}\right] \tag{1.11}$$

Per il teorema di Fermat nel punto di minimo la derivata è nulla per cui uguagliando a zero la (1.11), dopo facili calcoli si ottiene:

$$\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{n} \qquad (1.12)$$

che è del tipo $\sin x = x$. Questa equazione trascendente ha una sola soluzione immediata per *x=0.*

Dunque $\frac{2\pi}{n}\to 0$ e quindi $n\to\infty$.

Quale poligono di area fissata ha infiniti lati ciascuno dei quali tende a 0? Tutti sanno che questa figura geometrica è la circonferenza.

Vediamo infatti che per $n\to\infty$ si ottiene dalla (1.10) la relazione valida per la circonferenza:

$$p=\pi r \Rightarrow \ p^2=\pi^2 r^2=\pi(\pi r^2)=\pi A \qquad (1.13)$$

come volevasi dimostrare!

Cosa c'entrano gli eschimesi?

Un ragionamento analogo lo si può fare con i solidi regolari e si può dimostrare che a parità di volume il solido che ha la minor superficie è la sfera. E' forse per questo che gli eschimesi costruiscono le loro case (igloo) a forma sferica, perché a parità di volume interno vivibile hanno la minor superficie esterna e quindi la minor dispersione di calore possibile.