Il calcolo combinatorio

L'arte del contare

prof. Fabio Bonoli

16 dicembre 2008

Sommario

Sommario

3– PROBLEMI VARI DI COMBINATORIA

- **Principio dei vicini**
- **Principio della cassettiera**
- **Partizione di un intero e colorazioni**
- **Divisori di un intero**
- **Sottoinsiemi**

4 – APPLICAZIONI AL CALCOLO DELLE PROBABILITA'

- **Il gioco del lotto e del superenalotto**

In quanti modi può accadere un evento?

Quanti …

Il calcolo combinatorio si occupa di determinare (contare) quanti sono i raggruppamenti che si possono fare con n oggetti di un insieme finito, secondo determinate regole.

Problema:

In quanti modi una associazione composta da 9 membri può nominare un presidente, un vice e un segretario cassiere?

Testo equivalente:

Quanti sono i possibili consigli di amministrazione?

Schematizzando:

Quante sono le possibili configurazioni (terne) <u>ordinate</u> e <u>senza ripetizioni</u>?

Soluzione:

9 scelte possibili per il presidente, a questo punto restano 8 scelte possibili per il vice presidente e infine 7 scelte per il segretario.

$$9 \times 8 \times 7 = 504 \text{ modi}$$

PRIMA REGOLA

Se una scelta può essere fatta in r modi diversi,

per ciascuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in s modi diversi,

e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte, una terza scelta può essere effettuata in t modi diversi ecc.,

allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in

$$r \cdot s \cdot t \ \ldots \text{ modi diversi}$$

Problema:

Quattro squadre partecipano ad un torneo, quante sono le possibili classifiche finali?

Schematizzando: Quante sono le possibili configurazioni (quaterne) ordinate e senza ripetizioni? (Tutti gli elementi vengono considerati)

Soluzione:

4 scelte possibili per il vincitore, a questo punto restano 3 scelte possibili per il secondo, 2 scelte possibili per il terzo e infine 1 scelta obbligata per l'ultimo classificato.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ classifiche}$$

SECONDA REGOLA (CONSEGUENZA DELLA PRIMA)

Dati n oggetti, essi si possono "mettere in fila" (o "mettere in colonna") in n! modi diversi,

dove il simbolo $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Infatti, per la scelta del primo oggetto della fila abbiamo n possibilità;

a ciascuna di queste n possibilità sono abbinate $(n-1)$ possibilità di scelta per il secondo oggetto della fila;

ad ognuna delle $n\cdot(n-1)$ possibilità per i primi due oggetti corrispondono $(n-2)$ possibilità di scelta per il terzo oggetto della fila; ... ;

in totale, quindi, n oggetti possono essere ordinati in

$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ modi diversi.

Problema:

In quanti modi un insegnante può scegliere 4 studenti in una classe di 25 alunni per un'ora di interrogazioni?

Testo equivalente:

Quante sono le possibili quaterne di alunni interrogati?

Schematizzando:

Quante sono le possibili configurazioni (quaterne) <u>NON ordinate</u> e <u>senza ripetizioni</u>?

Soluzione:

Ragionando come prima, calcoliamo le quaterne ordinate:

25 scelte possibili per il primo, a questo punto restano 24 scelte possibili per il secondo, ora 23 scelte possibili per il terzo e infine 22 scelte per l'ultimo.

$$25 \times 24 \times 23 \times 22 = 303600$$

Noi però vogliamo "raggruppare" tutte le quaterne "equivalenti" (cioè, contenenti gli stessi ragazzi, sia pure in ordine diverso) per "farne una sola",

MA DATA UNA QUATERNA ORDINATA, QUANTE SONO LE QUATERNE ORDINATE AD ESSA EQUIVALENTI (COMPRESA QUELLA DI PARTENZA)?

SONO TANTE QUANTI I MODI CON CUI, DATI 4 OGGETTI, ESSI POSSONO ESSERE ORDINATI (= MESSI IN FILA)

Pertanto, fissata una quaterna ordinata, essa fa parte di un gruppo di 4! quaterne equivalenti.

Il numero delle quaterne non ordinate di ragazzi interrogati sarà $(25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22)/ 4! = 12650$

TERZA REGOLA (CONSEGUENZA DELLE PRECEDENTI)

Se in un dato problema ci interessano le n-uple NON ordinate, dobbiamo pensare il nostro elenco di n-uple ordinate ripartito in tanti gruppi, in ciascuno dei quali vi sono le n-ple che contengono gli stessi elementi, anche se in ordine diverso.

Abbiamo così tanti gruppi, ciascuno formato da n! n-uple, e ciascun gruppo va contato "come se si trattasse di una sola n-upla".

Allora

$$\text{numero n-ple non ordinate} = \frac{\text{numero n-ple ordinate}}{n!}$$

Le disposizioni

Supponiamo di avere n oggetti distinti (ad es: n palline numerate progressivamente da 1 a n, oppure n lettere dell'alfabeto, ...).

Sia ora k un intero, $k \leq n$.

Le k-uple (configurazioni con k elementi) ORDINATE che si possono costruire utilizzando (senza ripetizione) k fra gli n oggetti dati sono anche dette "le DISPOSIZIONI degli n elementi di classe k”.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio: Se ho 10 ragazzi, in quanti modi posso scegliere: un portiere, un arbitro e un raccattapalle?

$$D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Le combinazioni

Le k-uple NON ORDINATE che si possono costruire utilizzando (senza ripetizione) k fra n gli oggetti dati sono anche dette "le **COMBINAZIONI** degli n oggetti dati di classe k".

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

tale passaggio è possibile anche per k = n ricordando che **0! =1**

DA RICORDARE

- **Disposizioni: configurazioni ordinate**
- **Combinazioni: configurazioni non ordinate**

Esempio: Giocando a briscola, quante sono le possibili "mani" all'inizio del gioco per un giocatore?

$$C_{40,3} = \frac{40!}{37! \cdot 3!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37!}{37! \cdot 6} = 9880$$

Le disposizioni con ripetizione

Si parla di "**DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE**" quando uno stesso oggetto, nella k-upla ordinata, può essere ripetuto più di una volta. In questo caso, non deve essere necessariamente $k \leq n$.

Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti, presi a k a k, si indica col simbolo

$$D'_{n,k} = n^k$$

Esempio: Se si lanciano 10 monete (o anche: se si lancia una moneta 10 volte) quanti sono gli esiti possibili?

$$D'_{2,10} = 2^{10} = 1024$$

Le permutazioni

Le "**PERMUTAZIONI DI n OGGETTI**" sono tutte le n-uple ordinate costruibili utilizzando, senza ripetizione, quegli oggetti;

$$P_n = n!$$

Esempio: Quanti sono gli anagrammi della parola PARCO

$$P_5 = 5! = 120$$

La funzione fattoriale può anche essere definita in modo ricorsivo:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Le permutazioni

Permutazioni di n oggetti non tutti diversi

Possiamo pensare alle "**PERMUTAZIONI DI n OGGETTI NON TUTTI DIVERSI**“.

Presi n oggetti, dei quali m<n uguali fra loro, e gli altri tutti diversi l’uno dall’altro e dai precedenti, quante n-uple ordinate distinguibili potremo costruire utilizzando quegli n oggetti?

$$P_n = \frac{n!}{m!}$$

Esempio:

Abbiamo 3 palline bianche identiche fra loro, 6 palline rosse identiche fra loro e 5 palline verdi tutte identiche fra loro, quante sequenze distinguibili potremo costruire con questi 3+6+5=14 oggetti?

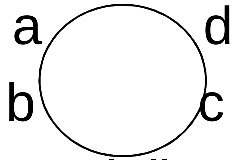
$$P_n = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3!} = \frac{14!}{3! \cdot 6! \cdot 5!}$$

Le permutazioni

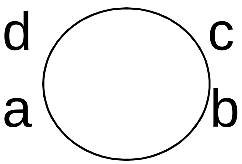
Esistono anche le "**PERMUTAZIONI CICLICHE DI n OGGETTI**".

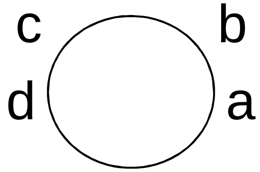
Una "permutazione ciclica di n oggetti"è "uno dei modi in cui tali oggetti possono essere disposti intorno ad un tavolo circolare, come se fossero giocatori di carte".

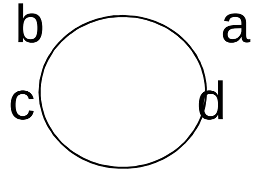
E' evidente che la situazione



coincide, in questo contesto, con ciascuna delle seguenti: $P'_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$







Esempio: In quanti modi si possono disporre 5 giocatori di carte intorno a un tavolo? 4! = 24

Il coefficiente binomiale

I numeri

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

vengono anche detti “coefficienti binomiali”

Il coefficiente binomiale   risponde alla domanda:

"dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?"

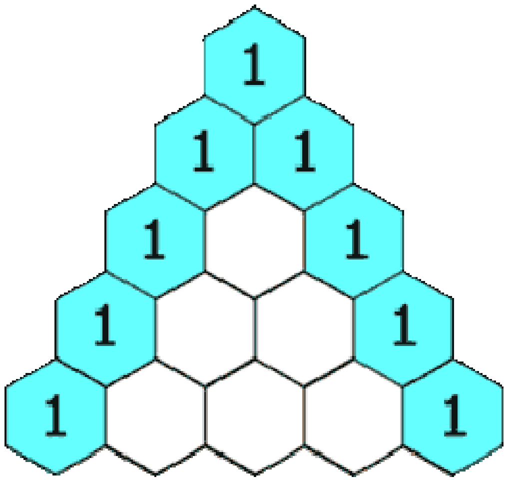
Proprietà

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n-1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1\ ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Il binomio di Newton

Si chiama "binomio di Newton" la formula per lo sviluppo dell'n-esima potenza di un binomio.



La formula è:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Il binomio di Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

<u>Dimostrazione della formula.</u>

$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \ldots . (a+b)$ dove a secondo membro abbiamo n fattori. Facciamo la moltiplicazione scegliendo, da ciascun fattore (a+b), o il termine a, o il termine b, in tutti i modi possibili, per poi sommare algebricamente i prodotti così ottenuti.

Ora, se io scelgo, ad esempio, k volte il fattore b e n-k volte il fattore a, avrò il monomio $a^{n-k}b^k$

Quante volte comparirà, questo monomio, nella somma finale? $\binom{n}{k}$

Perché il coefficiente binomiale conta in quanti modi dati n oggetti (fattori) ne posso selezionare k (il termine b).

Problemi vari di combinatoria

"Principio dei vicini"

315 senatori. Tiro a sorte l'ordine in cui parlano. Determina la probabilità che 2 senatori dati, Sergio e Giulio parlino uno di seguito all'altro.

Casi possibili: modi in cui possono parlare senza restrizioni = 315!

Casi favorevoli: modi di parlare con i due vicini

- Modi di sceglierne 2 vicini? 314
- 2 sono le permutazioni GIU – SER
- 313! L'ordine degli altri

$$p = \frac{314 \cdot 2 \cdot 313!}{315!} = \frac{314 \cdot 2 \cdots 313!}{315 \cdot 314 \cdot 313!} = \frac{2}{315}$$

“Principio dei vicini”

Altro modo:

Calcoliamo la probabilità che Giulio parli subito prima di Sergio

314/ 315 è la probabilità che Giulio non sia l’ultimo

1/314 è la probabilità che Sergio sia il successivo

$$p = 2 \cdot \frac{314}{315} \cdot \frac{1}{314} = \frac{2}{315}$$

“Principio della cassettiera o della piccionaia”

Il principio della piccionaia

Il principio della piccionaia afferma che se **p** piccioni devono trovare posto in **c** caselle e ci sono più piccioni che caselle (**p>c**) allora in qualche casella entreranno almeno due piccioni.

Tale principio può essere descritto anche nel modo seguente.

Il principio della cassettiera

Se n oggetti sono collocati in k cassetti, e se n>k, allora almeno un cassetto deve contenere almeno due oggetti.

“Principio della cassettiera o della piccionaia”

Esempio.

Se ci sono 8 piccioni in 7 caselle, allora, poiché 8 > 7, almeno una casella contiene almeno 2 piccioni.

Questo è un principio semplice ma di grande utilità.

Estensione del principio della piccionaia

Se p (piccioni) > n*c (caselle) per qualche intero n, allora almeno una casella contiene n + 1 piccioni.

Esempio.

Se ci sono 27 piccioni in 8 caselle, allora, poiché 27 > 3*8, almeno una casella contiene 3 + 1 = 4 piccioni.

Esercizi

Calzini in una stanza buia

In un cassetto ci sono 10 paia di calzini marroni e 10 paia blu. Quanti calzini devi prendere per essere sicuro di avere un paio di calzini dello stesso colore?

E' sufficiente pescare 3 calzini

Palline nere, rosse e bianche

In un cassetto ci sono 12 palline nere, 8 rosse e 6 bianche.

Pescando a caso, quante se ne devono prendere per essere sicuri di averne 3 dello stesso colore?

Nella peggiore delle ipotesi, 6 palline non sono sufficienti. Infatti potrebbero essere B-B-N-N-R-R. Supponiamo di essere arrivati a 6 palline senza averne 3 dello stesso colore. Visto che i colori sono 3 e che la settima deve per forza essere B o N o R allora se ne avranno almeno 3 dello stesso colore. In conclusione bisogna pescarne almeno 7.

Partizioni di un intero e colorazioni

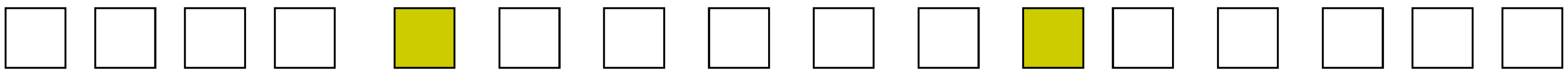
Problema:

In quanti modi si possono scegliere tre numeri a, b, c (non negativi) tali che a+b+c=14 (da notare che 5+2+7 è diverso da 2+5+7)

Soluzione:

Ne coloro 2: restano 3 tronconi, la somma dei cui elementi è 14.

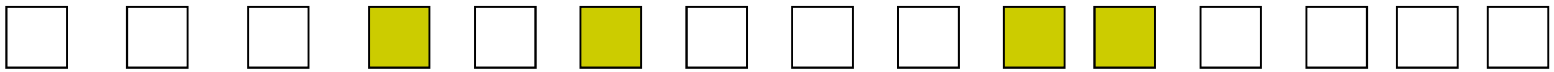
L'idea è che ad ogni modo di colorare 2 caselle su 16 corrisponde univocamente un modo di scegliere 3 numeri che sommati formano 14.



$$\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

Partizioni di un intero e colorazioni

In generale:



$$\binom{n+k-1}{k-1} = \text{combinazioni con ripetizioni di n} + 1\,\text{elementi}$$

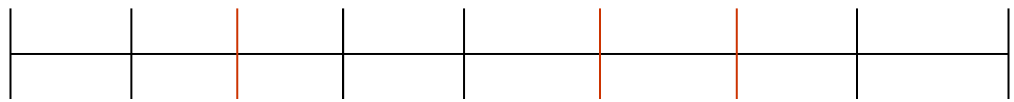
$$\text{in classe k - 1} \qquad\qquad C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

E se fra gli addendi non ci può essere lo zero?

Partizioni di un intero e colorazioni

Problema:

Dato un intero positivo, in quanti modi può essere espresso come somma di k interi maggiori o uguali di 1? (L'ordine conta!)



$$\binom{n-1}{k-1} = \text{combinazioni di n -1 segmentini interni}$$

$$\text{in classe k -1}$$

Principio di inclusione - esclusione

Problema:

In una classe con 30 studenti. Tutti suonano almeno uno strumento. 20 alunni suonano il piano e 16 la chitarra. Quanti entrambi?

Soluzione:

30 = 20 + 16 – x x = 6

Ritroviamo $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Problema Olimpiadi 1998 (biennio):

In una classe di 20 persone, 15 giocano a calcio, 14 a basket e 13 a pallavolo. Quanti sono, al minimo, che praticano tutti e 3 gli sport?

Soluzione:

5 persone non giocano a calcio, 6 non giocano a basket, 7 non giocano a pallavolo. Al massimo sono 5 + 6 + 7 =18. Quindi almeno 2 ragazzi devono praticare tutti e tre gli sport.

Divisori di un intero positivo

Problema:

Quanti sono i divisori di 2009?

Soluzione:

Fattorizzo $2009 = 7^2 \cdot 41$

Come è un divisore di 2009? $7^a \cdot 41^b$

Con a = 0, 1, 2   b= 0, 1

Pertanto si avranno 3 scelte per a e 2 scelte per b.

In totale $3 \times 2 = 6$

In generale: Se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{\alpha_n}$

I divisori di n sono $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$

Sottoinsiemi di un insieme

Problema:

Dato un insieme di n elementi, quanti sono tutti i suoi possibili sottoinsiemi?

Soluzione:

Si tratta dell'insieme delle parti di cardinalità 2^n

1 sottoinsieme con 0 elementi (insieme vuoto)

1 sottoinsieme con n elementi (insieme A)

n sottoinsiemi con 1 elementi

n sottoinsiemi con n-1 elementi (ne basta scartare uno)

$$\binom{n}{2} \text{ sottoinsiemi di 2 elementi (coppie)}$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} \text{ sottoinsiemi di n - 2 elementi}$$

Sottoinsiemi di un insieme

$$1+n+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n\text{-}2}+n+1=$$

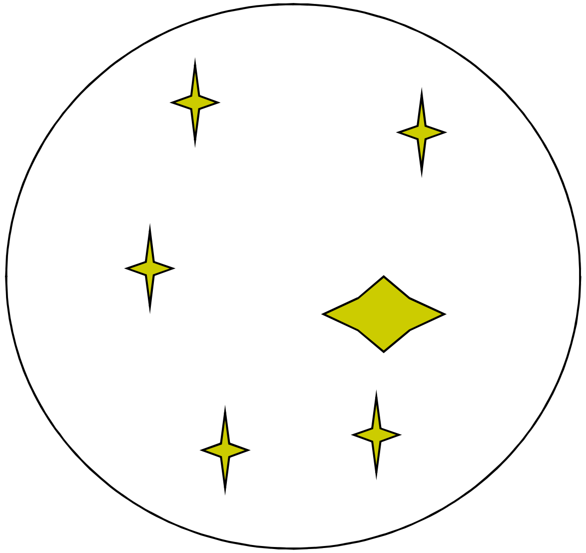
$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$$

Facile da dimostrare che

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \quad \text{perché } C_{n,k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=C_{n,n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Ultima formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$



Abbiamo visto che il coefficiente binomiale ci indica il numero di sottoinsiemi composti da k elementi presi da un insieme che ne contiene n.

Nel primo addendo si considerano i sottoinsiemi composti da k elementi nei quali non c'è l'elemento contrassegnato.

Il secondo addendo considera i sottoinsiemi composti da k elementi nei quali c'è anche l'elemento contrassegnato.

Il lotto

Tipo di giocata	Probabilità di vincita	Somma vinta	Speranza Matematica
Estratto	1/18	11,236 u	-0.32022
Ambo	1/400,5	250 u	-0.3738
Terno	1/11.748	4250 u	-0.6386
Quaterna	1/511.038	80.000 u	-0.84352
cinquina	1/43.949.268	1.000.000 u	-0.97799

Il lotto

Estratto:

$$\frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{\frac{89!}{4!\cdot 85!}}{\frac{90!}{5!\cdot 85!}} = \frac{89!\cdot 5!}{4!\cdot 90!} = \frac{1}{18}$$

E(x)=1/18(11,236x)-x(17/18)= -0.376 x

Ambo:

$$\frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{\frac{88!}{3!\cdot 85!}}{\frac{90!}{5!\cdot 85!}} = \frac{88!\cdot 5!}{3!\cdot 90!} = \frac{20}{89\cdot 90} = \frac{1}{400.5} = 0.00249$$

E(x)=1/400,5(250x)-x(399,5/400,5)= -0.37328 x

Il lotto

Terno:

$$\frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{\frac{87!}{2!\cdot 85!}}{\frac{90!}{5!\cdot 85!}} = \frac{87!\cdot 5!}{2!\cdot 90!} = \frac{60}{88\cdot 89\cdot 90} = 0.00008512$$

E(x)=1/11748(4250x)-x(11747/11748)= -0.638x

Quaterna:

$$\frac{C_{86,1}}{C_{90,5}} = \frac{86}{\frac{90!}{5!\cdot 85!}} = \frac{86}{\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{120}} = \frac{86}{43949268} = 0.000001956$$

Cinquina:

$$\frac{C_{85,0}}{C_{90,5}} = \frac{1}{\frac{90!}{5!\cdot 85!}} = \frac{1}{\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{120}} = \frac{1}{43949268} = 0.000000022$$

Il superenalolotto

Qual è la probabilità di fare "6" al superenalotto?

$$\frac{1}{C_{90,6}} = \frac{1}{622.614.630}$$

Qual è la probabilità di fare "5"?

I casi favorevoli sono tanti quante le sestine costruibili utilizzando 5 fra i miei 6 numeri, combinati con 1 degli 84 numeri che non ho giocato.

$$\frac{C_{6,5} \cdot C_{84,1}}{C_{90,6}} = \frac{6 \cdot 84}{C_{90,6}}$$

La probabilità appena calcolata non tiene conto del “numero jolly”, quello che può permettere, a chi abbia fatto “5”, di totalizzare eventualmente il cosiddetto “5+1”.

Il superenalolotto

Il numero calcolato rappresenta perciò la probabilità di fare “5 oppure 5+1”, e la probabilità di fare “cinque-e-basta” andrà ricalcolata sottraendo, da tale numero, la piccolissima probabilità di fare “5+1”

<u>Valutiamo la probabilità di indovinare il “5+1”.</u>

I casi favorevoli sono 6.

Facciamo un esempio: sono stati estratti 6, 16, 26, 36, 46, 56, e il 77 come numero jolly,

vincono il “5+1” tutti coloro che hanno giocato una delle sestine

77, 16, 26, 36, 46, 56	6, 77, 26, 36, 46, 56
6, 16, 77, 36, 46, 56	6, 16, 26, 77, 46, 56
6, 16, 26, 36, 77, 56	6, 16, 26, 36, 46, 77

Il superenalolotto

Quindi la probabilità di “fare 5+1” è 6/ $C_{90,6}$.

Riepilogando: è 504/ $C_{90,6}$ la probabilità di “fare 5 o 5+1”, è 6/ $C_{90,6}$ la probabilità di “5+1”, dopo aver fatto 5. Pertanto è 498/ $C_{90,6}$ la probabilità di “fare 5 solamente”.

Qual è la probabilità di fare "4"?

I casi favorevoli sono tanti quante le sestine costruibili utilizzando

4 fra i miei 6 numeri, combinati con 2 degli 84 numeri che non ho giocato.

$$\frac{C_{6,4} \cdot C_{84,2}}{C_{90,6}} = 0.0000839$$

Riferimenti Internet utili:

1. www.chihapauradellamatematica.org
2. *http://www2.ing.unipi.it/~d9199/*
3. *http://olimpiadi.dm.unibo.it/*