Corso di approfondimento di matematica

Dimostrazione per induzione

A.Trottoli

Dimostrazione matematica

1. Diretta
2. Per assurdo
3. Per induzione

Dimostrazione diretta

Esempio:

Dimostriamo che n^3-n è un numero pari qualunque sia $n \in N$

$n^3-n = n*(n^2-1) = n*(n-1)*(n+1)$

Se n è un numero pari allora n* (n-1)*(n+1) è pari !

Se n è dispari allora n-1 ed n+1 sono pari

quindi n* (n-1)*(n+1) è pari !

C.V.D.

Dimostrazione per assurdo

Esempio:

Vogliamo dimostrare che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale

Neghiamo il teorema e quindi supponiamo che sia possibile scrivere la √2 come frazione cioè

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$ dove m, n sono numeri primi fra loro

Elevando al quadrato abbiamo: $2 = \frac{m^2}{n^2}$ E quindi $m^2 = 2n^2$

Allora m^2 è un numero pari

Ma allora dovrà contenere due volte il numero 2 quindi m è pari, allora si può scrivere m = 2 k

Sostituendo otteniamo $4\,k^2 = 2\,n^2$, semplificando: $2\,k^2 = n^2$

Ma allora anche n è pari

Quindi sia m che n sono divisibili per 2

contro l'ipotesi che siano primi fra loro $\Rightarrow$ √2 è irrazionale.

Dimostrazione per induzione

1	=1
1+3	=4
1+3+5	=9
1+3+5+7	=16
1+3+5+7+9	=25
1+3+5+7+9+11	=36
ecc.	

Sembra che la somma dei primi n numeri dispari sia uguale a n^2

ATTENZIONE!!

Questa è intuizione e non induzione!!

Allora come facciamo a dimostrare questo teorema per qualunque valore di n ?

Tutti i numeri dispari si possono scrivere come
2n-1 con n=1,2,3,4,5 …..

n=1	1
n=2	2*2-1=3
n=3	2*3-1=5
n=4	2*4-1=7
ecc	

Allora la somma dei primi n numeri dispari si può scrivere come :

1+3+5+7+……+(2n-1)

Che si può anche scrivere, in forma abbreviata:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

Quindi il teorema di prima si può scrivere: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

Principio di induzione:

a) Dimostriamo che la proposizione è vera per n=1

b) Dimostriamo che se è vera per n allora è vera per n+1

Infatti se è vera per n=1 allora per la b sarà vera per n=2,
Ma se è vera per n=2 allora sarà vera per n=3 ecc.

Quindi sarà vera per tutti i valori di n !!!

Dimostriamo adesso, col principio di induzione, che:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

Primo passo: è vera per n=1 ?

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1)=2*1-1=1 \qquad 1^2=1$$ Sono uguali quindi a) è vera!

Secondo passo: dobbiamo dimostrare che:

Se f(n) è vera allora è vera f(n+1)

$$f(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1}\left(2i-1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(2i-1\right)+\left(2\left(n+1\right)-1\right)$$

$$f(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)+(2(n+1)-1)$$

Se è vera f(n) allora : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

Sostituendo otteniamo:

$$f(n+1)=n^2+2n+2-1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Quindi : $f(n)\Rightarrow f(n+1)$

Pertanto $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ È vera!

Concludendo:

Per dimostrare f(n) dobbiamo:

a) Dimostrare f(1)

b) Dimostrare che f(n) $\Rightarrow$ f(n+1)

Proviamo a fare un altro esempio

Esempio n.2

Dimostriamo che: n^3-n divisibile per 3 qualunque sia n>1

Siccome n>1 cominciamo con n=2.

a) Per n=2 abbiamo : 2^3-2= 8-2=6 che è divisibile per 3

b) Calcoliamo f(n+1) supponendo vera f(n)

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=n^3-n+3n^2+3n$$

n^3-n è divisibile per 3 per ipotesi, $3n^2$+3n sono divisibili per 3

Allora f(n+1) è divisibile per 3

Allora la proposizione è vera!