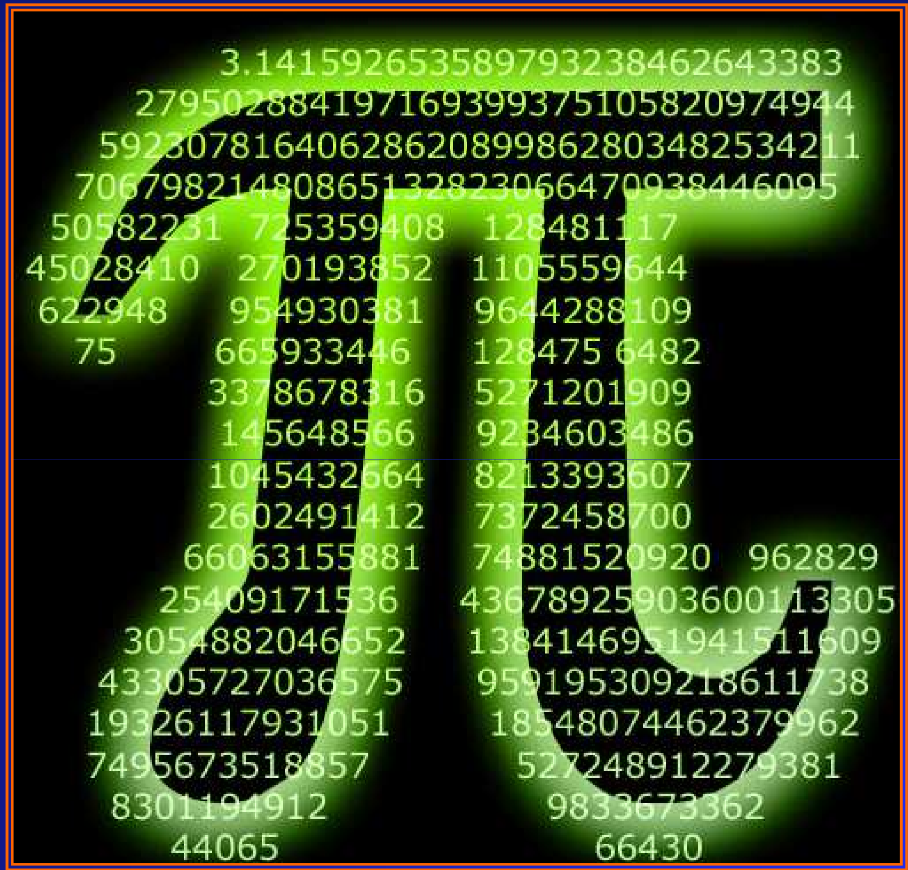
Breve storia del pi greco



«Esplorare π è come esplorare l'universo…»

David Chudnovsky

Definizione di pi greco

Come è noto, si indica con il simbolo π (pi greco) il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro:

$$\boxed{\pi = \frac{C}{2r}}$$

In realtà, questo nome (e questo simbolo) furono introdotti solo nel 1706 dal matematico inglese **William Jones**, entrando ben presto nell'uso comune soprattutto su iniziativa di **Leonhard Euler**.

Il problema di determinare il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro era molto più antico, ed era nato da considerazioni pratiche. Prima ancora di ogni considerazione geometrica o matematica, furono gli artigiani o gli agrimensori babilonesi a sentire la necessità di quantificare questo rapporto; o forse furono i costruttori di carri, che volevano sapere quanta strada potesse percorrere una ruota di un certo diametro in un giro.

Il primo valore di pi greco

Come prima approssimazione, è noto che i popoli della Mesopotamia e del Medio Oriente consideravano **π uguale a 3**.

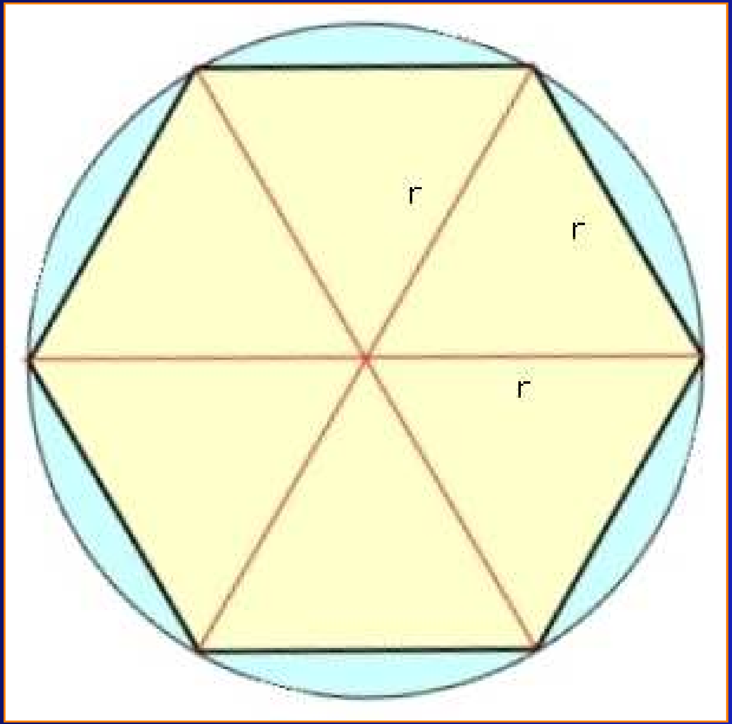
Anche nella Bibbia troviamo un riferimento a questo valore, che doveva costituire per tutti gli scopi pratici un'approssimazione soddisfacente e largamente utilizzata. Ecco la descrizione dell'enorme bacile, il "mare di bronzo", che ornava il tempio di Salomone:

«Fece un bacile di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, tutto rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti ed era circondato da un orlo di trenta cubiti».

Antico Testamento, I Re, 7:23
Datazione: circa 550 a.C.

Il primo valore geometrico

Una tavoletta babilonese risalente al 1900 a.C. definisce pi greco come il rapporto **25/8, pari a 3.125**, valore utilizzato anche dal famoso architetto romano Vitruvio.



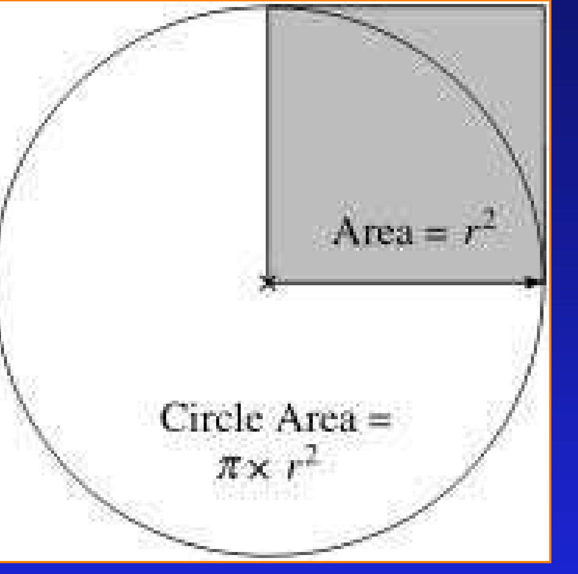
I babilonesi sapevano che il perimetro dell'esagono inscritto in un cerchio è tre volte il diametro; stimavano che il rapporto tra tale perimetro e la misura della circonferenza fosse dato dalla frazione $57/60 + 36/60^2$ e ottenevano:

$$\pi = \frac{3}{\frac{57}{60} + \frac{36}{3600}} = 3 + \frac{1}{8}$$

Non è tuttora noto il procedimento che conduceva i babilonesi a questa stima del rapporto esagono/circonferenza; è interessante notare che esso è espresso **in base sessagesimale**.

Oops! Un altro π?…

I matematici antichi avevano notato che esiste un rapporto costante anche tra l'area di un cerchio e quella del quadrato costruito sul suo raggio. A prima vista questo rapporto appariva uguale a π, ma la certezza di questa equivalenza si ebbe solo molto più tardi.



$$\pi = \frac{\text{Area cerchio}}{r^2}$$

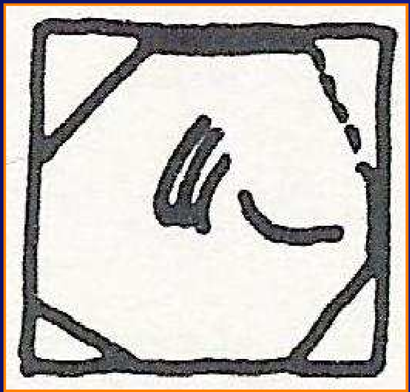
Frammento del Papiro di Rhind (1650 a.C.)
British Museum di Londra

Gli antichi egizi erano convinti che il π che si trova nelle formule che esprimono la lunghezza della circonferenza e l'area di un cerchio fosse lo stesso. Nel 1855 fu scoperto il **papiro di Rhind**, in cui lo scriba Ahmes intorno al 1650 a.C. enunciò 84 problemi algebrici e geometrici con le relative soluzioni; in una di queste viene fornito un metodo per determinare il rapporto tra le aree del cerchio e del quadrato del suo raggio, ovvero il numero π.

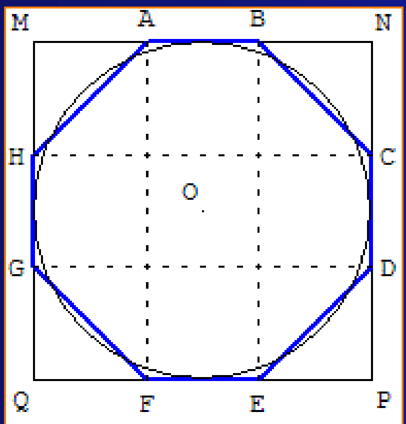
Il problema 50 del papiro di Rhind

«Un campo circolare ha il diametro di 9 khet. Qual è la sua area?»

Soluzione: *«Sottraete 1/9 del diametro, cioè 1 khet. Rimangono 8 khet. Moltiplicate 8 per 8; il risultato è 64. Quindi l'area è composta da 64 khet quadrati di terra».*



Questa figura accompagna il problema 48 del papiro di Rhind, e fa capire che questo metodo deriva da un'approssimazione del cerchio con l'ottagono (irregolare) inscritto nel quadrato di lato uguale al diametro. Il simbolo interno rappresenta il numero 9 espresso nella scrittura ieratica.



Ecco un possibile schema esplicativo (figura in basso): se il diametro è 9 khet, l'area del quadrato è 81 e l'area complessiva dei quattro triangoli esterni è 18; l'area dell'ottagono è quindi 63 khet quadrati. Dalla figura si nota che la parte del cerchio che eccede il contorno dell'ottagono è leggermente maggiore di quella che rimane interna; ciò porta il risolutore a valutare arbitrariamente l'area del cerchio a 64 khet^2: esattamente l'area del quadrato di lato pari al diametro del cerchio diminuito di 1/9. Il valore esatto dell'area del cerchio, approssimato a 4 cifre significative, è 63.62 khet^2.

Allora quanto vale π per gli egizi?

Detto *d* il diametro del cerchio, la sua area *S* secondo il papiro di Rhind è:

$$S = \left(d - \frac{d}{9} \right)^2 = \left(\frac{8}{9} d \right)^2$$

Il calcolo dell'area con la nota formula che utilizza il π fornisce il valore:

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2$$

Uguagliando queste formule si ottiene:

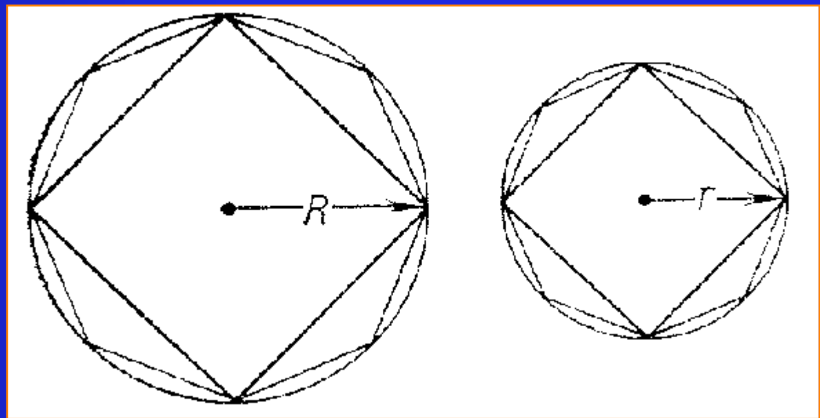
$$\pi = \left(\frac{8}{9} d \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{d} \right)^2 = \left(\frac{16}{9} \right)^2 \cong 3.1605$$

Matematica e geometria in Grecia

Nel mondo greco, la matematica e la geometria superano lo status di semplici conoscenze pratiche, funzionali al lavoro e alla tecnologia, e diventano pure astrazioni concettuali, verità assolute e autonome che la mente umana è in grado di raggiungere.

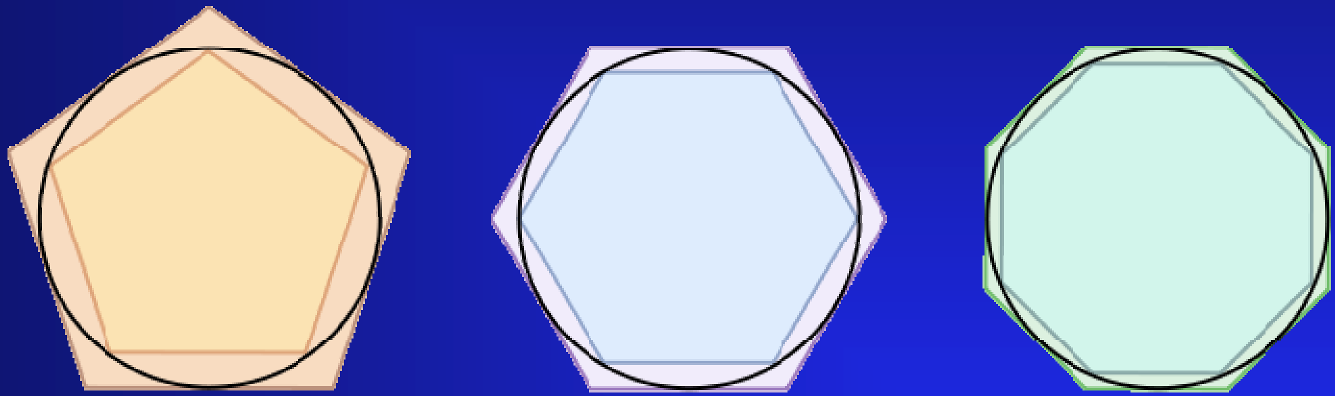
Eudosso di Cnido (408 - 355 a.C.)

Uno dei primi grandi matematici dell'antica Grecia fu **Eudosso di Cnido**, che conseguì grandi risultati soprattutto in geometria e astronomia. A lui si deve, ad esempio, la dimostrazione rigorosa del fatto che il rapporto tra le aree di due cerchi è uguale al quadrato del rapporto dei loro diametri (o dei loro raggi).



Eudosso e il metodo di esaustione

Per ottenere questo ed altri risultati in geometria piana e solida, Eudosso inventa un procedimento, detto ***metodo di esaustione***, che consente di approssimare una linea curva con un poligono avente un numero sempre maggiore di lati.



Tutte le opere scritte da Eudosso sono state perdute, ma gli altri grandi matematici greci che hanno usato e approfondito le sue idee, ne hanno esplicitamente riconosciuto la paternità. Tra questi troviamo **Euclide**, che negli *Elementi* si propone di usare il metodo di esaustione per tentare di risolvere uno dei grandi problemi geometrici dell’antichità: la ***quadratura del cerchio***, ovvero la costruzione con riga e compasso, e in un numero finito di passi, di un quadrato della stessa area di un cerchio dato.

Euclide e la quadratura del cerchio

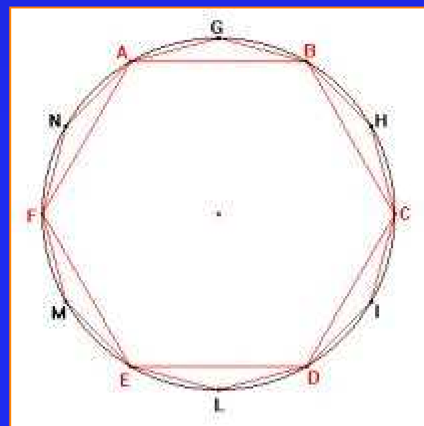
Euclide di Alessandria (IV - III sec. a.C.)

Il problema della quadratura del cerchio ha impegnato i matematici per secoli, e solo nel 1882 il matematico tedesco Ferdinand von Lindemann dimostrerà definitivamente che esso non ha soluzione. Questo problema coincide, ovviamente, con quello della determinazione esatta di π, che dopo Euclide sembrava possibile: infatti egli afferma che considerando i poligoni regolari inscritti in un cerchio, aumentando il numero dei lati la differenza fra l'area del cerchio e quella dei poligoni può essere resa più piccola di qualsiasi quantità positiva arbitrariamente piccola. Nel linguaggio dei limiti, che formalmente nascerà duemila anni dopo, si scrive:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(C-2P\right)=0}$$

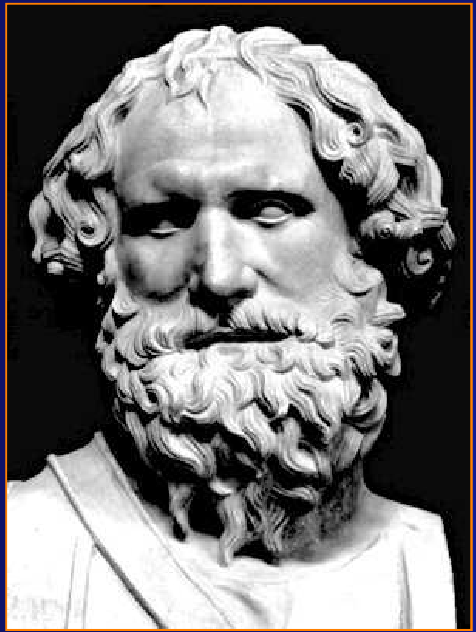
Dove *C* è la circonferenza e *2P* il perimetro del poligono inscritto; se il diametro del cerchio ha misura 1, si ha anche:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} 2P=\pi}$$



Java Applet in questa pagina:
www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math101/notes/integration/archimedes.html

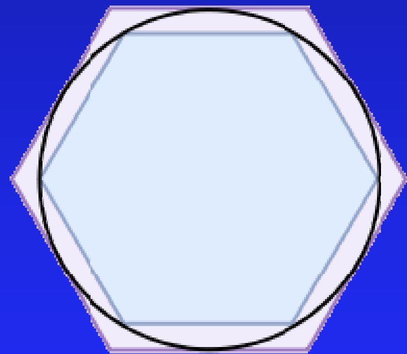
Il tentativo di Archimede



Archimede di Siracusa (287 - 212 a.C.)

Poiché il calcolo numerico di tale limite era impossibile per i greci, Archimede ebbe un'idea innovativa: **determinare i limiti entro i quali π poteva variare**, raffinando poi la ricerca per quanto possibile. Per semplicità di costruzione e di calcolo partì dall'esagono inscritto e circoscritto a un cerchio di diametro *d*, e considerando che la circonferenza doveva essere compresa tra i loro perimetri, ottenne la relazione:

$$3d < C < 2\sqrt{3}d \Rightarrow 3 < \pi < 3.4641$$



Quindi raddoppiò il numero dei lati, costruendo i dodecagoni e trovando:

$$\frac{6}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}d < C < \frac{12}{2+\sqrt{3}}d \Rightarrow 3.1058 < \pi < 3.2153$$

Archimede continuò a raddoppiare, fino a calcolare per il poligono di 96 lati:

$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$$

ovvero:

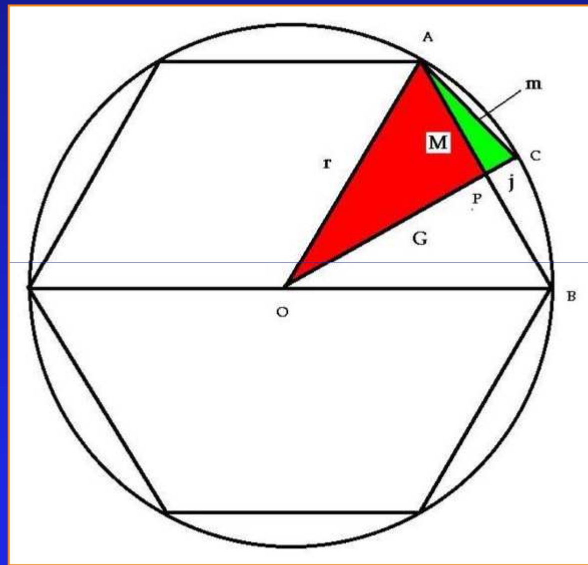
$$3.1410 < \pi < 3.1427$$

Intanto, in Cina…

Liu Hui (III sec.d.C.)

… si usavano per π valori grossolani, come 3 o radice di 10; nel 263 d.C. il matematico **Liu Hui** utilizzò un metodo simile a quello di Archimede, giungendo però a una migliore approssimazione.

Parte da un poligono inscritto di n lati di misura M; applicando il teorema di Pitagora da $AP = M/2$ trova OP, $PC = r - OP$ e ancora con Pitagora determina la misura m del lato del poligono inscritto di $2n$ lati.



Con questo metodo, Liu Hui riesce a calcolare l'area dei poligoni inscritti e circoscritti di 192 lati, giungendo a determinare questi limiti per π:

$$\boxed{3.141024 < \pi < 3.142704}$$

A questo punto Liu dice che 3.14 è già una buona approssimazione per π , e la esprime come 157/50; afferma anche di aver interpolato i due valori qui sopra trovando $\pi = 3.1416$, e che questo valore coincide con quello ottenuto nel calcolo del poligono di 1536 lati. Dunque secondo Liu non vale la pena di andare oltre, e il suo calcolo si ferma qui.

… e nel resto del mondo

Anche in India i matematici del IV e V secolo calcolano il valore 3.1416, utilizzando sempre il metodo dei poligoni regolari; in Cina il matematico **Tsu Chung-Chih** riprende il metodo di Liu Hui e arriva a calcolare π con poligoni di 24576 lati, ottenendo:

$$\boxed{3.1415926 < \pi < 3.1415927}$$

espresso con buona approssimazione dalla frazione **355/113**. In Europa una tale precisione sarà raggiunta solo nel XVI secolo.

Nel mondo dell'Islam, il matematico e astronomo Claudio Tolomeo (100 - 170 d.C.) usava la frazione 377/120 = 3.1416666 senza però darne motivazione; tale valore restò in uso per secoli, finché nel 1429 **Al-Kashi**, calcolando il perimetro di un poligono di $3 \cdot 2^{28}$ lati, determinò π alla sedicesima cifra decimale:

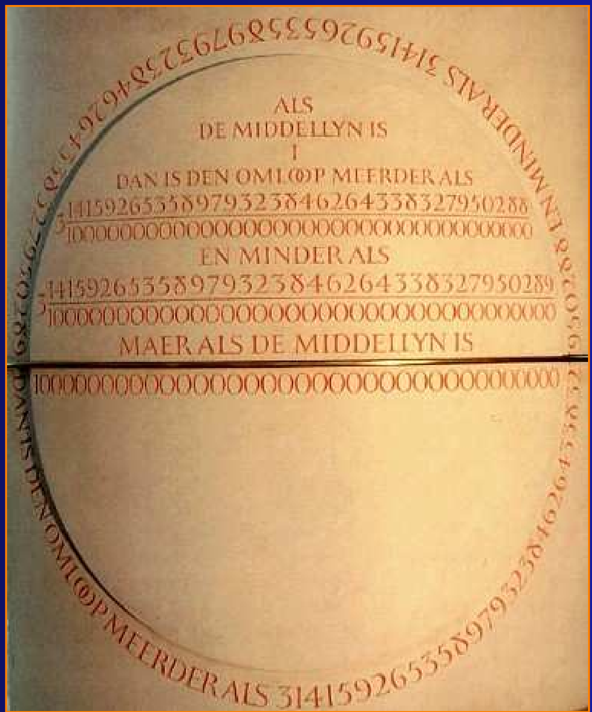
$$\boxed{\pi = 3.1415926535897932}$$

Per la prima volta nella storia, l'uomo conosce π con più di 10 cifre decimali.

Gli sviluppi del calcolo in Europa

Nel 1202 **Leonardo Fibonacci** calcola l'approssimazione π = 3.141818, esatta solo nelle prime quattro cifre significative.

Nei quattro secoli successivi, i matematici europei non faranno altro che ritrovare risultati già ottenuti dai matematici orientali, utilizzando in sostanza lo stesso metodo di approssimazione del cerchio mediante poligoni con un grande numero di lati.



Ricostruzione dell'epitaffio tombale di Ludolph van Ceulen (1539 - 1610)

Il paese in cui si ottengono i maggiori risultati è l'Olanda; verso la fine del XVI secolo i progressi sono tali da uguagliare e superare la precisione dei calcoli precedenti.

Nel 1593 **Adriaen von Rooman** calcola π con 15 decimali usando un poligono di 2^{30} lati.

Nel 1596 **Ludolph van Ceulen**, applicando il metodo di Archimede con incredibile ostinazione, calcola π con 20 decimali, usando un poligono di $60 \cdot 2^{33}$ lati. Nel 1609 arriva a 34 decimali, che vuole iscritti nell'epitaffio della sua pietra tombale. Ancora oggi, in Germania, π è detto "numero di Ludolph".

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288$$

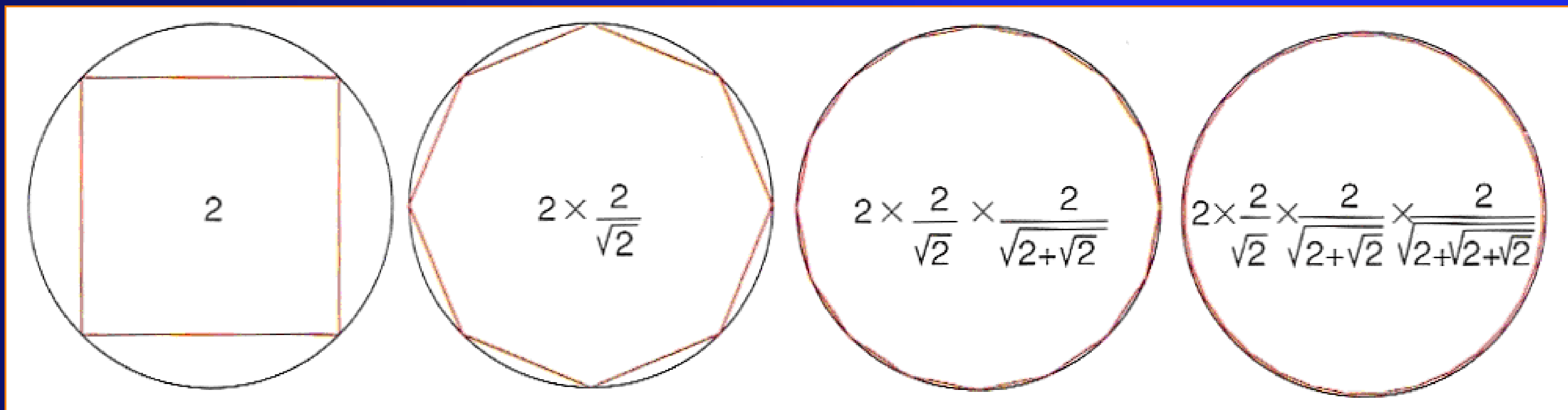
François Viète e la formula infinita

François Viète (1540 - 1603)

Nel 1593 il matematico **François Viète**, il padre dell'algebra simbolica, tenta di calcolare l'area del cerchio di raggio unitario approssimandola con poligoni di 4*n* lati: quadrato, ottagono, esadecagono…

Viète ottiene una formula che ad ogni passo si ripete con la medesima struttura: il prodotto dell'area del poligono precedente per un fattore radicale di struttura ben definita:

$$2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots$$

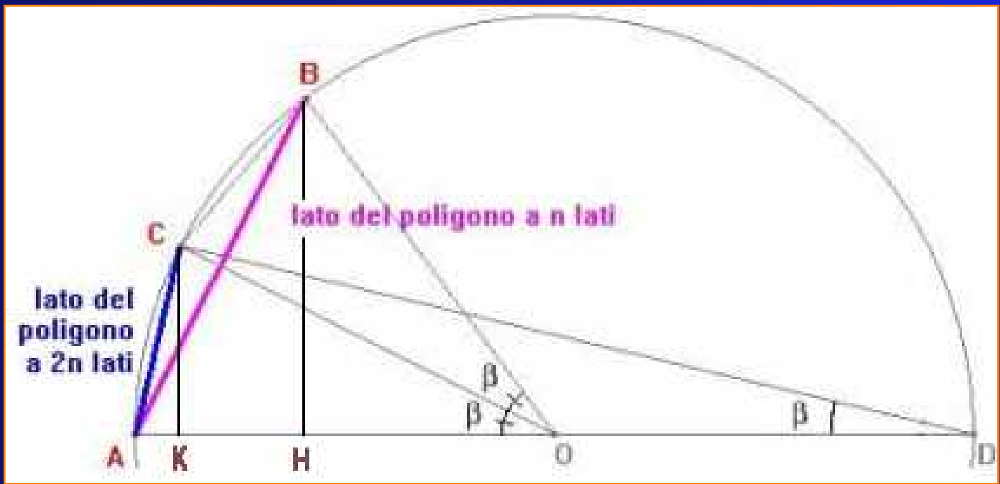


- Passando al limite per *n* che tende all'infinito, Viète ottiene una **formula infinita** per π:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \ldots$$

Questa formula è importante non tanto per il risultato a cui è arrivato il matematico francese, che si fermò a 9 cifre decimali di pi greco, quanto perché essa costituisce la prima evidenza della possibilità di esprimere π con una formula algebrica ricorsiva. Come vedremo, in seguito verranno scoperte varie formule infinite come questa.

Ma come ci è arrivato Viète? Se conoscete un po' di trigonometria, potete scoprirlo da soli. Osservate la figura qui sotto: il cerchio ha raggio unitario, AB è il lato del poligono a *n* lati e AC quello del poligono a 2*n* lati. Raddoppiando il numero dei lati, l'area del triangolo OAB diventa quella del quadrilatero OACB, equivalente al triangolo ADC. Così l'area passa da sen 2ß = 2sen ß cos ß a 2 sen ß: si ottiene l'area del nuovo poligono dividendo la precedente per cos ß. Partendo da un quadrato (ß = 45°) si ottiene proprio la formula di Viète.



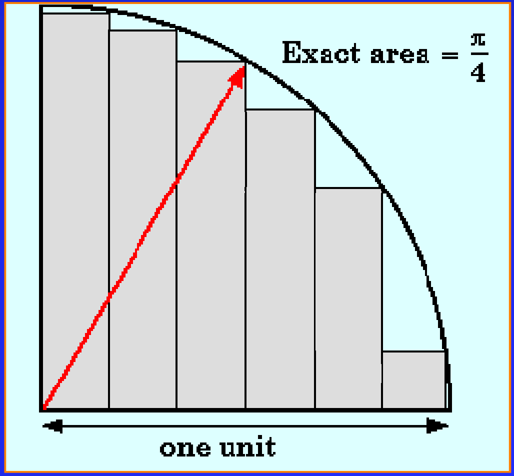
Nuovi metodi: il prodotto di Wallis

John Wallis (1616 - 1703)

John Wallis fu uno dei precursori dell'analisi infinitesimale. I suoi metodi di calcolo delle aree mediante somme di piccoli rettangoli costituiscono l'idea di base del calcolo integrale; lo stesso Newton studiò a fondo le sue opere.

Nel 1655 pubblicò una formula per il calcolo di π che deriva da questa approssimazione, applicata alla curva che rappresenta il quarto di circonferenza di raggio unitario. Operando a passi successivi, con una pazienza certosina Wallis ottiene il prodotto infinito:

$$\pi = 2 \times \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \frac{6 \times 6}{5 \times 7} \times \ldots$$



La formula di Viète usa numeri radicali, mentre questa bella formula dà il valore di π, che come vedremo è un numero irrazionale e trascendente, usando soltanto numeri razionali. Tuttavia, **essa converge molto lentamente**: per trovare l'approssimazione π = 3.14 sono necessarie 500 iterazioni.

Brouncker: π come frazione continua

William Brouncker (1620 - 1684)

Operando sulla formula di Wallis, William Brouncker la trasformò in una ***frazione continua***:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{\dots}{\dots + \cfrac{(2n+1)^2}{2 + \dots}}}}}$$

Le frazioni continue sono un modo diverso e interessante di esprimere i numeri reali. Esse sono dette ***regolari*** se i loro numeratori sono tutti uguali a 1, e possono essere ***finite*** se esprimono numeri razionali, o ***infinite*** se esprimono numeri irrazionali. Ad esempio, si ha:

$$\frac{57}{17} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$$

$$[3,2,1,5]$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

$$[1,2,2,2,\dots]$$

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

$$[1,1,1,1,\dots]$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \dots}}}}$$

$$[3,7,15,1,292,\dots]$$

In tre per una formula

Nel XVII secolo, lo sviluppo dell'analisi infinitesimale portò all'introduzione di un nuovo, potentissimo strumento: lo **sviluppo in serie**, ovvero la possibilità di esprimere una funzione come somma infinita di termini più semplici.

James Gregory (1638 - 1675) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 - 1716) enunciarono una formula per l'arcotangente di *x* che era stata scoperta circa tre secoli prima dal matematico indiano **Madhava di Sangamagramma** (ca.1350 - ca.1425):

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Essendo l'arcotangente la funzione inversa della tangente, e poiché tan $\pi/4 = 1$, allora arctan $1 = \pi/4$. Sostituendo in questa formula *x* con 1 si ottiene una formula infinita per π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Formula di Madhava - Gregory - Leibniz

Anche questa formula converge molto lentamente: per arrivare al risultato approssimato di Archimede è necessario calcolare circa 100 000 termini della serie.

Convergenze più veloci

Oramai la strada era tracciata: ben presto i matematici si accorsero che usando la funzione arcotangente era possibile calcolare π con sempre maggiore accuratezza e velocità. La stessa formula precedente, applicata con alcune varianti, converge molto più rapidamente.

Dopo i tentativi di Newton, Sharp e altri, fu **John Machin** a scoprire nel 1706 una formula che converge molto rapidamente:

John Machin (1680 - 1752)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Usando questa formula, che permette di determinare mediamente 14 nuove cifre decimali ogni 10 iterazioni, Machin sarà il primo matematico a calcolare π con 100 decimali. Dopo di lui, altri “cacciatori di decimali” raggiungeranno nuovi traguardi:

- **Georg von Vega** (1794, 136 decimali)
- **William Rutherford** (1853, 440 decimali)
- **William Shanks** (1873, 707 decimali)

Il mago Eulero

Leonhard Euler (1707 - 1783)

A **Leonhard Euler** va riconosciuto un ruolo di primissimo piano nella storia della matematica e nella storia del π. Ha lasciato il segno della sua genialità in moltissimi campi del calcolo e della geometria, e ha scritto "la più bella formula di tutta la matematica" (*Richard Feynman*), base dell'analisi complessa:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Nei ritagli di tempo, Eulero ha scoperto molte formule infinite che conducono al valore di pi greco; eccone alcuni esempi:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

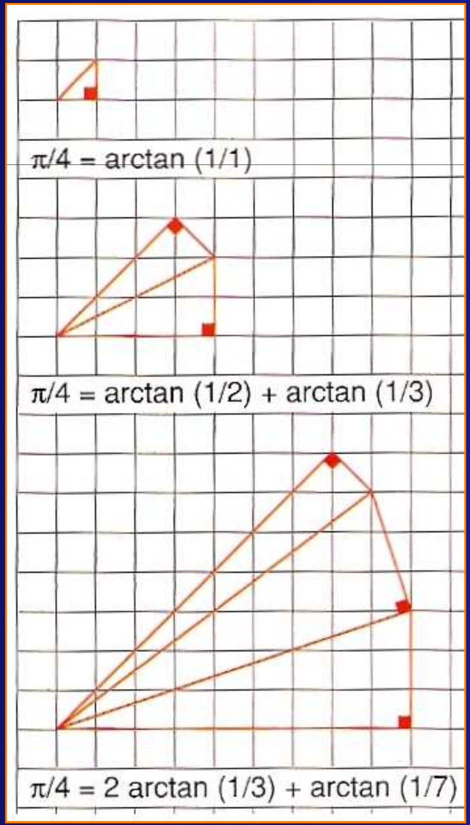
$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

$$\pi = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\times 2}{3\times 5} + \frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7} + \ldots\right)$$

Alcune formule di Eulero convergono rapidamente, come si può vedere dall'esempio che si trova all'indirizzo: www.saluccinicola.net/pagina6.html

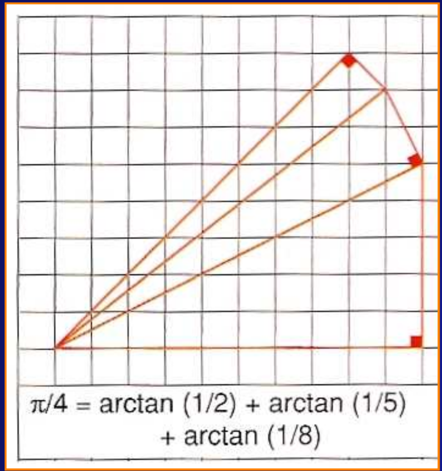
Le formule con arcotangenti

Prima dell'era dei computer, per calcolare molte cifre decimali di π era assolutamente indispensabile lavorare con formule rapidamente convergenti; i metodi più efficaci sono quelli che utilizzano arcotangenti e che esprimono π/4 = arctan 1 in cui quest'ultima funzione è espressa come somma o differenza di altre arcotangenti. Ma come si trovano? Come si arriva a dire, ad esempio, che π/4 = arctan(1/2) + arctan (1/3)?

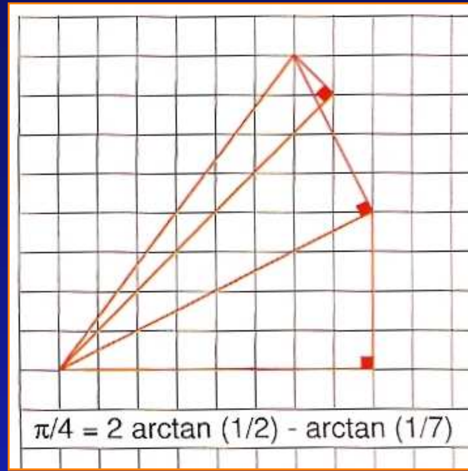


Proviamo a costruire angoli di π/4, ovvero 45°, su un foglio di carta quadrettata. Il triangolo più semplice che si può disegnare è il triangolo rettangolo e isoscele di lato 1 (figura in alto). Osserviamo che un angolo di 45° si può ottenere anche sovrapponendo a un triangolo di cateti 2 e 4 un altro triangolo rovesciato di cateti √2 e 3√2. Le tangenti degli angoli acuti adiacenti di questi due triangoli sono 1/2 e 1/3; dunque si ha 45° = π/4 = arctan(1/2) + arctan (1/3).

Nel terzo esempio si nota che si può ottenere un angolo totale di 45° sovrapponendo tre triangoli rettangoli: i cateti dei due inferiori stanno tra loro nel rapporto 1/3, e in quello superiore nel rapporto 1/7. Dunque π/4 = 2arctan(1/3) + arctan (1/7).



Altri due esempi ci aiutano a capire il modo in cui si possono sommare, ma anche sottrarre, due o più arcotangenti e ottenere come risultato un angolo di 45° . Per queste costruzioni è indispensabile che i lati comuni di due triangoli adiacenti siano perfettamente uguali.



Di solito le formule basate sulle arcotangenti convergono molto più rapidamente di altre, e sono le più utilizzate sia nel calcolo manuale che in quello svolto dalle prime macchine calcolatrici, per minimizzare sia il tempo di calcolo che il relativo costo.

Finora, la formula migliore tra quelle con le arcotangenti è risultata la seguente:

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} - 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943}$$

che risulta del 14.33% più efficiente in termini di “costo di calcolo” rispetto alla formula di John Machin. Quest’ultima però diede avvio all’era digitale dei cacciatori di decimali: fu infatti basato sulla formula di Machin il calcolo impostato nel 1948 da Rietwiesner, Von Neumann e Metropolis sull’**ENIAC**, il primo calcolatore elettronico a valvole termoioniche, che dopo 70 ore di lavoro fornì pi greco con 2037 decimali.

Sviluppi e risultati recenti

Attualmente i calcoli vengono svolti da computer sempre più veloci e potenti, per i quali sono stati sviluppati complessi algoritmi a convergenza rapida, ancora più efficienti delle formule con arcotangenti. Ecco, in breve, la cronologia dei risultati più recenti:

• Guillod e Bouyer	1973	1 001 250 decimali
• Tamura e Kanada	1982	8 388 576
• Kanada, Yoshino e Tamura	1982	16 777 206
• Bailey	1986	29 360 111
• Kanada e Tamura	1988	201 326 551
• Chudnovsky	1989	480 000 000
• Kanada e Tamura	1989	536 870 898
• Chudnovsky	1989	1 011 196 691
• Kanada	1995	6 442 450 938
• Kanada e Takahashi	1997	51 539 600 000
• Kanada e Takahashi	1999	206 158 430 000

Yasumasa Kanada (1949 -)

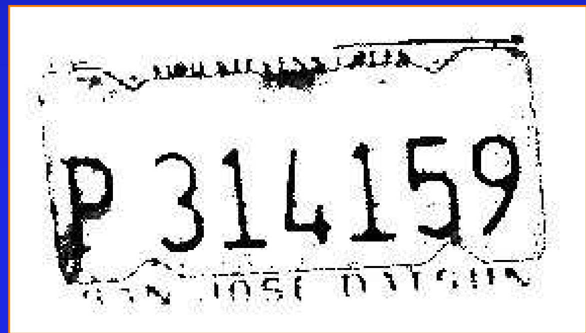
Nel settembre 2002 **Yasumasa Kanada**, dell'Università di Tokio, insieme a un team di 9 ricercatori, ha calcolato il valore di pi greco con **1 241 100 000 000 cifre decimali**.

Il calcolo è stato effettuato su una rete di 64 computer Hitachi SR 8000/MPP e ha richiesto 601 ore e 56 minuti di lavoro.

La progettazione del programma utilizzato da Kanada ha richiesto circa cinque anni di lavoro.

Il Times di Londra ha fatto notare che basta conoscere pi greco con 39 cifre decimali per calcolare la circonferenza di un cerchio che comprenda tutto l'universo noto con approssimazione pari al raggio di un atomo di idrogeno.

Il prof.Kanada ha replicato che gli piace calcolare le cifre di pi greco "perché è una sfida".



La targa dell'auto di Kanada

Ma nel mondo della matematica non tutti apprezzano. Secondo Philip Davis, ad esempio, «*il misterioso e mirabile π è ridotto a un gargarismo che aiuta i computer a schiarirsi la voce*».

L'algoritmo contagocce

Nel 1990 **Stanley Rabinowitz** e **Stan Wagon** hanno scoperto un algoritmo per calcolare π da soli, senza l'aiuto di macchine calcolatrici; è stato chiamato "**algoritmo contagocce**" per la sua lentezza, ma oltre ad avere un profondo significato matematico, garantisce una certa soddisfazione personale.

L'algoritmo si basa su una tabella di calcolo le cui dimensioni vanno calcolate sulla base del numero di cifre con cui vogliamo conoscere π: se lo vogliamo con n cifre, serve una tabella di $4n + 3$ righe e $3{,}4 \cdot n + 3$ colonne.

($3{,}4 \cdot n + 3$) (arrotondato all'intero più vicino) colonne

($4n + 3$) righe

Ad esempio, se vogliamo calcolare le prime 3 cifre di π, dobbiamo predisporre una tabella di 15 righe per 13 colonne, che prepareremo nel modo seguente:

A	pi greco	r	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
B			**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**
Inizio		**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x 10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
riporto												**0**
somma												
resto												
x 10												
riporto												**0**
somma												
resto												
x 10												
riporto												**0**
somma												
resto												

Ora dobbiamo calcolare le tre sottotabelle che forniranno le cifre richieste, partendo da quella superiore e dalla prima colonna a destra. Riempiamo la riga “x 10” con i prodotti della riga “inizio” moltiplicati per 10.

Ora, partendo dalla prima colonna a destra, sommiamo il contenuto della riga “x 10” e della riga “riporto” e lo scriviamo nella riga “somma”:

A	pi greco	r	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
B			**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**
Inizio		**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x 10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
riporto											0	**0**
somma												20
resto												20
x 10												
riporto												**0**
somma												
resto												
x 10												
riporto												**0**
somma												
resto												

Dividiamo questo risultato per il contenuto della riga B; scriviamo il resto di questa divisione nella riga “resto” e moltiplichiamo il quoziente per il contenuto della riga A, scrivendone il risultato nella riga “riporto” della colonna a sinistra.

Ripetiamo questo procedimento nella seconda colonna da destra: sommiamo e dividiamo come prima, riportando resto e quoziente nelle apposite celle.

A	pi greco	r	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
B			**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**
Inizio		**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x 10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
riporto		10	12	12	12	10	12	7	8	9	0	**0**
somma		**30**	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20
resto			2	2	4	3	10	1	13	12	1	20
x 10												
riporto												**0**
somma												
resto												
x 10												
riporto												**0**
somma												
resto												

Se procediamo in questo modo per tutta la prima sottotabella, arriveremo a scrivere un numero nella colonna “r” alla riga “somma. Questo è il numero che ci interessa: contiene la chiave per poter procedere.

Scriviamo la prima cifra di questo numero nella riga”somma” e nella colonna “pi greco”, e la seconda nella riga “resto”sottostante.

A	pi greco	r	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
B			**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**
Inizio		**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x 10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
riporto		10	12	12	12	10	12	7	8	9	0	**0**
somma	**3**	**30**	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20
resto		**0**	2	2	4	3	10	1	13	12	1	20
x 10		0	20	20	40	30	100	10	130	120	10	200
riporto		13	20	33	40	60	42	91	72	45	90	**0**
somma	**1**	**13**	40	53	80	90	142	101	202	165	100	200
resto		**3**	1	3	3	0	10	10	7	12	5	11
x 10												
riporto												**0**
somma												
resto												

Ora siamo pronti a ripetere l’intero ciclo di calcolo per la seconda sottotabella, ripartendo dalla moltiplicazione dei resti della tabella precedente per 10 e proseguendo come prima, fino ad arrivare all’ultima somma della colonna “r”. Scriviamo la prima cifra di questo numero nella colonna “pi greco” e la seconda nella riga “resto”.

Ripetiamo la procedura nella terza sottotabella e otteniamo il risultato della figura qui sotto.

A	pi greco	r	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
B			**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**
Inizio		**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
x 10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
riporto		10	12	12	12	10	12	7	8	9	0	**0**
somma	**3**	**30**	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20
resto		**0**	2	2	4	3	10	1	13	12	1	20
x 10		0	20	20	40	30	100	10	130	120	10	200
riporto		13	20	33	40	60	42	91	72	45	90	**0**
somma	**1**	**13**	40	53	80	90	142	101	202	165	100	200
resto		**3**	1	3	3	0	10	10	7	12	5	11
x 10		30	10	30	30	0	100	100	70	120	50	110
riporto		10	20	24	32	75	72	63	72	45	50	**0**
somma	**4**	**40**	30	54	62	75	172	163	142	165	100	110
resto		**0**	0	4	8	3	7	7	7	12	5	5

Il nostro calcolo è terminato: abbiamo trovato le prime tre cifre di π, ovvero 3,14. Naturalmente non è tanto il risultato che ci interessa, quanto il fatto che esiste un algoritmo che permette a chiunque abbia a disposizione tempo e pazienza di calcolare l’esatto valore di pi greco con un numero arbitrario di cifre significative.

π è un numero irrazionale

I numeri che si possono esprimere come rapporto tra due numeri interi sono detti **numeri razionali**. Sono razionali, ad esempio, 1.4 = 7/5 e 0.1666… = 1/6.

I numeri che **non** possono essere espressi in tal modo sono detti **irrazionali**; tali sono, ad esempio, $\sqrt{2}$ e ø, la famosa sezione aurea. Questi numeri hanno infiniti decimali, non periodici, e sono stati un incubo per i matematici greci, soprattutto della scuola di Pitagora.

Johann Heinrich Lambert
(1728 - 1777)

Nel 1761 **Johann Lambert** dimostrò, usando le frazioni continue e ragionando per assurdo, che anche π è irrazionale. Partendo dall'ipotesi contraria, ponendo cioè $\pi = a/b$ con a e b interi, Lambert giunse a dimostrare che anche tan $\pi/4$ deve essere irrazionale; ma poiché tan $\pi/4 = 1$, che è razionale, se ne deduce che ad essere falsa è la premessa di razionalità di π.

Dunque π è come $\sqrt{2}$? Non proprio. Nel 1794 **Adrien Legendre** dimostrò che anche π^2 è irrazionale, al contrario di quanto vale per $\sqrt{2}$.

Da questo risultato sembra, in definitiva, che pi greco possieda una irrazionalità "maggiore", una natura più complessa dei numeri che derivano la loro irrazionalità dal fatto di essere "sotto radice"; infatti, π non può essere espresso usando solo numeri razionali e radicali.

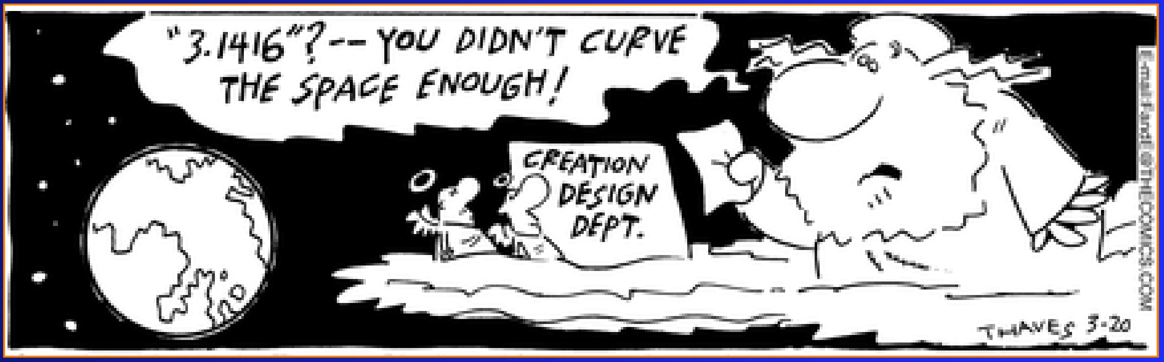
Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

π è un numero trascendente

I numeri reali o complessi che si possono considerare come soluzioni di un'equazione algebrica a coefficienti interi sono detti **numeri algebrici**. Sono algebrici tutti i numeri razionali e alcuni irrazionali.

I numeri che **non** sono algebrici sono detti **trascendenti**; questa definizione si deve ad Eulero, secondo il quale certi numeri «*trascendono la potenza dei metodi algebrici*». Questa congettura troverà conferma solo nel 1844, ad opera di **Joseph Liouville**. **Georg Cantor** scoprirà poi che i numeri trascendenti sono infinitamente più numerosi degli irrazionali, e determinerà, come Liouville, procedimenti che permettono di costruire numeri trascendenti.

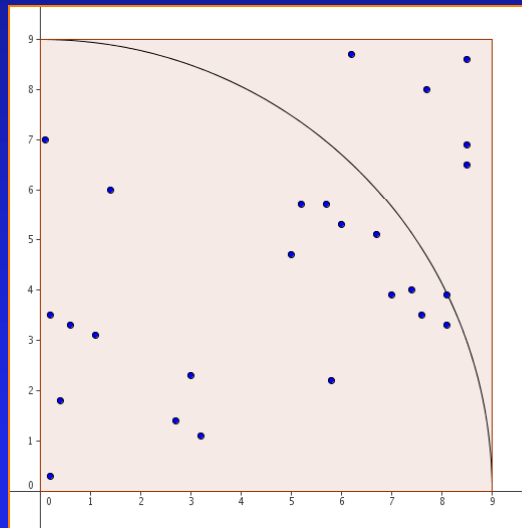
Allora π è trascendente? Il problema era importante, perché ad esso sono legate le questioni sulla quadratura del cerchio. Sarà **Ferdinand von Lindemann** a dare nel 1882 la definitiva dimostrazione della trascendenza di π, e a mettere la parola fine ai tanti tentativi di costruzione con riga e compasso.



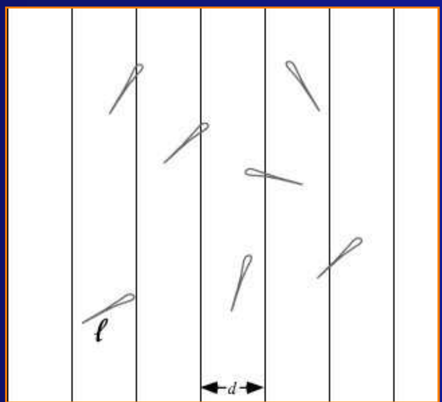
Pi greco abbandona la geometria

Il numero π ha un ruolo importante in geometria e si ritrova in tutte le formule che coinvolgono il cerchio, come la superficie e il volume della sfera, del cilindro, del cono e così via. In reltà esistono molti altri procedimenti, numerici o statistici, per definire questo numero. Eccone alcuni esempi:

• Generando casualmente punti del piano di coordinate (x, y) con x e y numeri naturali compresi tra 0 e n, il numero di quelli la cui distanza dall'origine è minore di n tende a π quando n tende all'infinito.



• La probabilità che due numeri interi scelti a caso siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune, è $6/\pi^2$ (**Ernesto Cesaro**, 1881).



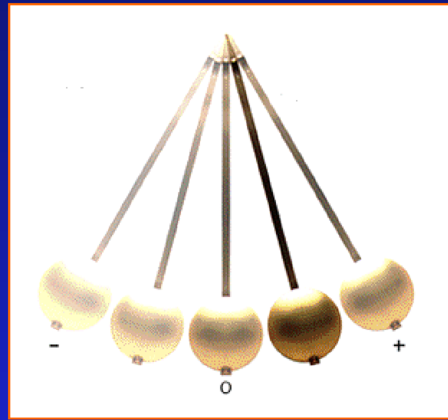
• Nel 1777 il **Conte di Buffon** scoprì che lanciando un ago lungo l su un parquet le cui linee siano a distanza d, la probabilità che esso intersechi una linea è $2\ l / \pi\ d$; nel caso particolare $l = d$ essa si riduce a $2/\pi$. Provate la simulazione nel sito:

www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html

Oltre a comparire molto spesso, e talvolta in modo del tutto inaspettato, nelle formule statistiche, π si trova anche in alcune importanti formule fisiche:

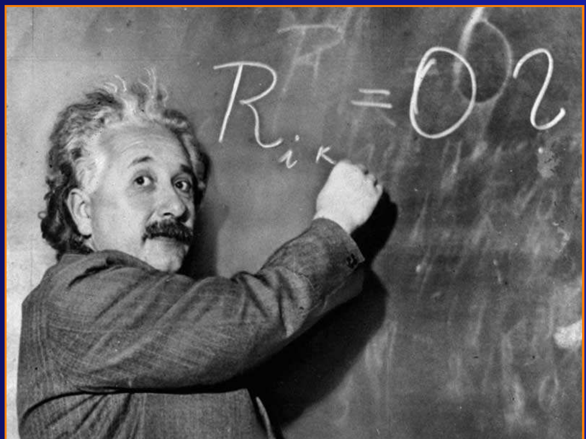
- **Periodo del pendolo**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



- **Legge di Coulomb**

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

- **Principio di indeterminazione di Heisenberg**

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

- **Equazioni di campo della teoria della relatività generale**

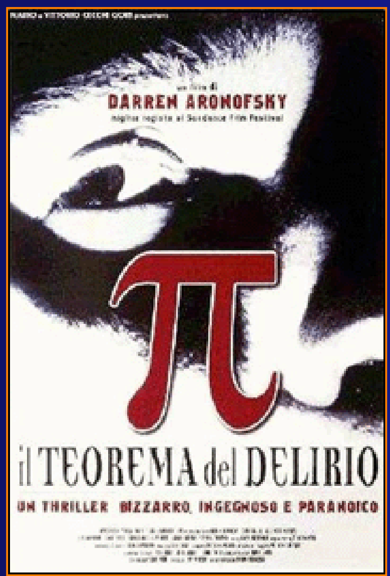
Curiosità e strane storie

Alcune filastrocche permettono di ricordare i primi decimali di pi greco. Ad esempio:

Ave o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza.Che n'ebbe d'utile Archimede da ustori vetri sua somma scoperta?

Ave	o	Roma	o	madre	gagliarda	di	latine	virtù	...
3,	1	4	1	5	9	2	6	5	...

In Australia c'è un club del π: per associarvi, dovete conoscerne a memoria almeno 100 cifre.



π - Il teorema del delirio

Film di Darren Aronofsky (Usa, 1998), è un thriller paranoici e ipercinetico che racconta l'avventura di un matematico alla ricerca del significato profondo dei numeri, considerati come fondamenti sia delle leggi di natura che dei comportamenti individuali. Le sue ricerche possono però portare anche alla previsione degli andamenti di borsa, e perciò interessano anche ad altri… un film interessante e impegnativo, con un finale enigmatico e aperto a varie interpretazioni.

Secondo alcune persone - che forse hanno visto troppe puntate di *Voyager* - la grande piramide di Cheope contiene sia il numero π (il rapporto tra lato e altezza è vicino a π/2) che la sezione aurea ø (rapporto tra l'altezza della faccia laterale e metà base). Si attribuisce la notizia a Erodoto, che a sua volta l'avrebbe appresa dai sacerdoti egiziani.

Mah!

Ecco alcune bellissime formule che definiscono pi greco o che vi si avvicinano moltissimo:

$$2\pi \approx 6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9}$$

Al - Kashi, ca.1430

$$\pi = \frac{9\,801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26\,390n)}{(n!)^4\, 396^{4n}} \right)^{-1}$$

Srinivasa Ramanujan, 1910

$$\sqrt[4]{\left(102 - \frac{2\,222}{22^2}\right)} = 3{,}14159265$$

Srinivasa Ramanujan, (1887 - 1920)

$$3 \cdot \sqrt[64]{\frac{708}{37}} = 3.141592652$$

Formula corretta fino all'ottava cifra decimale

$$\pi \approx \left(\frac{1}{10^5} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2/10^{10}} \right)^2$$

Questa formula fornisce il valore <u>esatto</u> di π fino a più di 42 miliardi di decimali, poi se ne discosta!

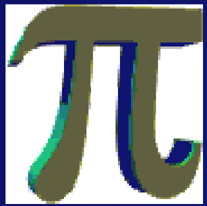
Nel 1996 **David Bailey**, **Peter Borwein** e **Simon Plouffe** hanno scoperto una procedura (formula BBP) che permette di calcolare qualunque cifra di π senza dover calcolare prima le altre cifre. Si basa sulla uguaglianza:

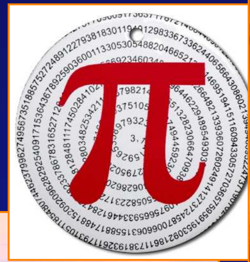
$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

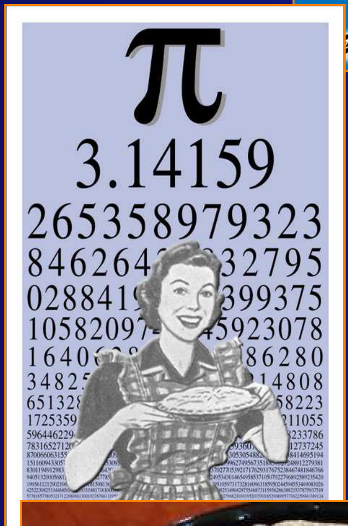
alla quale viene successivamente applicato un particolare algoritmo in base esadecimale che permette di identificare le cifre richieste. Ad esempio, si può calcolare la milionesima cifra esadecimale di π su una workstation Apple G5 in quattro secondi.

Il sito: www.angio.net/pi/piquery svolge la ricerca di una determinata sequenza di cifre nei primi 200 milioni di decimali del pi greco.

Il pi-day







Il 14 marzo di ogni anno (in notazione inglese 3/14) si celebra il **pi day**: una manifestazione nata per iniziativa del Museo della Scienza di S.Francisco e ormai adottata in tutto il mondo, per festeggiare il numero più famoso della storia della matematica.