Successioni Serie
Ricorsione

Definizione di successione

Consideriamo un insieme di numeri che metteremo in corrispondenza biunivoca con l'insieme N dei numeri naturali.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …….

1 4 9 16 25 36 49 64 ……

La seconda fila di numeri è la successione il cui termine generale si indica abitualmente con a_n e in questo caso avremo $a_n=n^2$.

Altri esempi

- $a_n = 3n-2$ $\quad$ $1,4,7,10,13,16,\ldots\ldots$
- $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ $\quad$ $0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{7},\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $a_n = \dfrac{3n}{2n+1}$ $\quad$ $1,\dfrac{6}{5},\dfrac{9}{7},\dfrac{12}{9},\dfrac{15}{11},\ldots\ldots\ldots$

Successione aritmetica

Una successione si dice aritmetica se, partendo da un numero (a_1), il successivo si ottiene dal precedente sommando ad esso un numero fisso k.

Esempio1: sia $a_1=7$ e $k=3$ avremo:

7 10 13 16 19 22 25 27 30 33………

Esempio2: sia $a_1=5$ e $k=1.3$ avremo:

5 6.3 7.6 8.9 10.2 11.5 ………….

Successione e serie aritmetica

In generale possiamo scrivere:

a_1 , a_1+k , a_1+2k , a_1+3k , a_1+4k , …….

a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ………

Il termine generale della successione si scrive:

$$a_n=a_1+(n-1)k$$

Ora vogliamo trovare la somma dei primi n termini, cioè la serie:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$$

Serie di Gauss

Serie aritmetica con a_1=1 e k=1 e n=500::

S_{500}=1+2+3+4+5+6+7+8+………….496+497+498+499+500

Facendo la somma in questo modo:

501+501+501+………. =501*250

Che si può anche scrivere: $(1+500)\bullet\frac{n}{2}=\frac{1+500}{2}\bullet n$

La formula generale risulterà:

$$\boxed{S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{a_1+a_n}{2}\times n}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

Questa formula vale anche nel caso in cui $k \neq 1$

Infatti:

$$S_n = a_1 + (a_1 + k) + (a_1 + 2k) + (a_1 + 3k) + \ldots + [a_1 + (n-1)k] + (a_1 + nk)$$

$a_1 + a_1 + nk = a_1 + a_n$

$a_1 + a_1 + nk = a_1 + a_n$

Quindi:

$$S_n = (a_1 + a_n) \bullet \frac{n}{2}$$

Che è equivalente alla formula precedente.

Successione geometrica

Una successione si dice geometrica se, partendo da un numero (a_o), il successivo si ottiene moltiplicando il precedente per un numero fisso q, detta ragione.

$$a \ , a*q \ , \ a*q^2 \ , \ a*q^3 \ , \ \ldots\ldots. \ , a*q^n$$

Esempio: Se un capitale iniziale C viene impiegato al 5% annuo, come aumenta nel corso degli anni?

1° anno	C	C
2° anno	C+C*0,05= C*1,05	C*1,05
3° anno	C*1,05*1,05	$C*1,05^2$
4°anno	C*1,05*1,05*1,05	$C*1,05^3$

Termine generale

Pertanto il termine generale della successione sarà:

$$a_n = a_o * q^n$$

La serie geometrica corrispondente sarà:

$$S_n = a_o + a_o q + a_o q^2 + a_o q^3 + \ldots\ldots + a_o q^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_o q^i$$

Formula risolutiva:

$$S_n = a_o + \cancel{a_o q} + \cancel{a_o q^2} + \cancel{a_o q^3} + \ldots\ldots + \cancel{a_o q^{n-1}}$$

Moltiplichiamo per q entrambi i membri:

$$qS_n = \cancel{a_o q} + \cancel{a_o q^2} + \cancel{a_o q^3} + \ldots\ldots + \cancel{a_o q^{n-1}} + a_o q^n$$

Sottraiamo membro a membro:

$$(1-q)S_n = a_o - a_o q^n$$

Se q=1 dalla prima otteniamo $S_n=a_o*n$

Se q≠1 allora:

$$\boxed{S_n = a_o \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Somme infinite

Serie aritmetica:

a_1 , a_1+k , a_1+2k , a_1+3k , a_1+4k , …….

La somma era: $$S_n = (a_1 + a_n) \bullet \frac{n}{2}$$

Cosa succede se facciamo crescere n indefinitivamente ,
o come si dice lo mandiamo a +∞

Se k>0 il termine a_n cresce all'∞, e anche n tende all' ∞
Il prodotto crescerà all' ∞ (+ ∞)

Se k<0 il termine a_n tende a -∞, e n tende a +∞
Il prodotto crescerà all' ∞ (-∞)

Quindi comunque sia k la serie aritmetica diventa ∞ comunque sia il valore di k (≠0)

La scrittura corretta risulta:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_o + i * k) \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ -\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE!!!!

Non tutte le serie tendono all'∞

Consideriamo ora la serie geometrica:

Serie geometrica

Abbiamo visto che la somma n-esima è: $S_n = a_o \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Consideriamo il termine q^n.

Esempi: Se $q=2$ allora avremo che q^n tenderà all'∞

n=1	$q^1=2$	n=100	$q^{100}=1{,}26\text{x}10^{30}$
n=2	$q^2=4$	n=1000	$q^{1000}=1{,}71\text{x}10^{301}$
n=5	$q^5=32$	n=10000	$q^{10000}=1{,}99\text{x}10^{3010}$
n=10	$q^{10}=1024$	$n=10^5$	$q^{100000}=9{,}099\text{x}10^{30102}$

In generale se $q>1$ il termine q^n tenderà a + ∞ quindi:

$$s_n \xrightarrow{n\to+\infty} \infty \begin{cases} +\infty \text{ se } a_o > 0 \\ -\infty \text{ se } a_o < 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso in cui $q<1$.

La somma n-esima è sempre:

$$S_n = a_o \frac{1-q^n}{1-q}$$

Chiediamoci cosa succede a q^n quando n cresce.

Supponiamo che $q=0,2$

$n=1$	$q^1=0,2$
$n=2$	$q^2=0,04$
$n=5$	$q^5=0,00032$
$n=10$	$q^{10}=0,0000001024$
$n=1000$	$q^{1000}=1,0715 \times 10^{-699}$

Serie geometrica infinita

Come abbiamo visto :

$$\boxed{\begin{array}{l} se \quad -1 < q < 1 \\ q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{array}}$$

Allora la formula:

$$S_n = a_o \frac{1-q^n}{1-q}$$

diventerà:

$$\boxed{S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}}$$

Riassumendo

La serie geometrica:

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a \bullet q^n = \begin{cases} \infty & se \quad q \leq -1 \vee q \geq 1 \qquad (\, diverge \,) \\ \dfrac{a}{1-q} & \text{se} \quad -1 < \text{q} < 1 \qquad (\, converge \,) \end{cases}$$

Le successioni e serie aritmetica e geometrica non sono le uniche. Ad esempio la successione $a_n=n^2$ non è né di un tipo né dell'altro.

Inoltre le definizioni che abbiamo dato in precedenza non sono le sole possibili

Ricorsione

La successione aritmetica l'abbiamo definita col termine generale:

$a_n = a_o + n*k \qquad n=0,1,2,3,4……..$

Ma c'è un'altra possibilità:

$$\begin{cases} se\ \ \mathrm{n} = 0 \ \ \text{allora} \ \ \mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_\mathrm{o} \\ se\ \ \mathrm{n} \neq 0 \ \ \text{allora} \ \ \mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_{\mathrm{n-1}} + \mathrm{k} \end{cases}$$

Esempio: supponiamo che $a_o=5$ e $k=3$, determiniamo a_4.

$a_4=a_3+3 = a_2+3+3= a_2+6 = a_1+3+6 = a_1+9 = a_o+3+9=$

$=5+12=17$

Quindi $a_4=17$

Ricorsione2

Si può fare anche con la geometrica:

$$\begin{cases} se\ \ \mathrm{n} = 0\ \ \text{allora}\ \ \mathrm{a}_{\mathrm{n}} = \mathrm{a}_{\mathrm{o}} \\ se\ \ \mathrm{n} \neq 0\ \text{allora}\ \ \ \mathrm{a}_{\mathrm{n}} = \mathrm{a}_{\mathrm{n-1}} * \mathrm{q} \end{cases}$$

Esempio: Sapendo che $a_o=5$, $q=2$, determiniamo a_4.

$a_4=a_3*2 \ = a_2*2*2 \ = a_2*4 \ =a_1*2*4 \ = a_o*2*8 \ = 5*16=80$

Fate caso che in questa modo di definire la successione
Il termine a_n si definisce attraverso il precedente.

In certe situazioni la ricorsione è l’unica alternativa possibile oppure è la più chiara e intuitiva.

Altro esempio: Definiamo n!

$$\begin{cases} O! = 1 \\ n! = n \bullet (n-1)! \end{cases}$$

Proviamo a calcolare 5!

5!= 5*4!= 5*4*3! = 5*4*3*2! =5*4*3*2*1!=

=5*4*3*2*1*0!=120

Numeri di Fibonacci

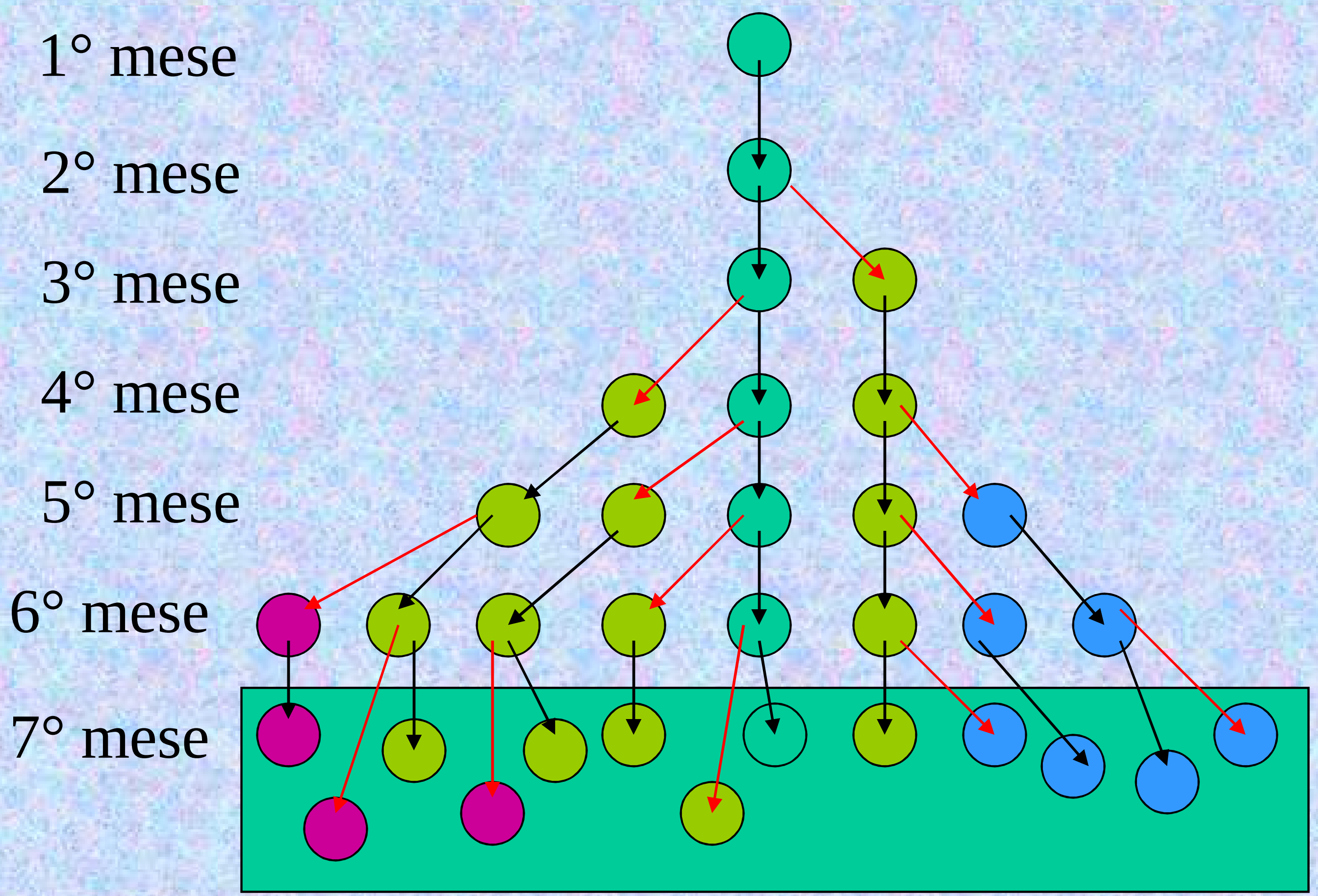
Leonardo Bonacci da Pisa detto Fibonacci (figlio di Bonacci) era un mercante (~1200) ed entrò in contatto con gli arabi e portò
In Italia per primo i numeri indiani compreso lo 0 :

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Per dimostrare che i numeri indiani erano più comodi e facili da usare per fare i calcoli fu sfidato a risolvere il seguente problema:

Partendo con una coppia di conigli, che avranno una coppia di figli dopo un mese, quante coppie di conigli avremo dopo n mesi?

Albero genealogico dei conigli



1
1
2
3
5
8
13

Successione di Fibonacci

1	1
1	1
2	2=1+1
3	3=2+1
5	5=3+2
8	8=5+3
13	13=8+5

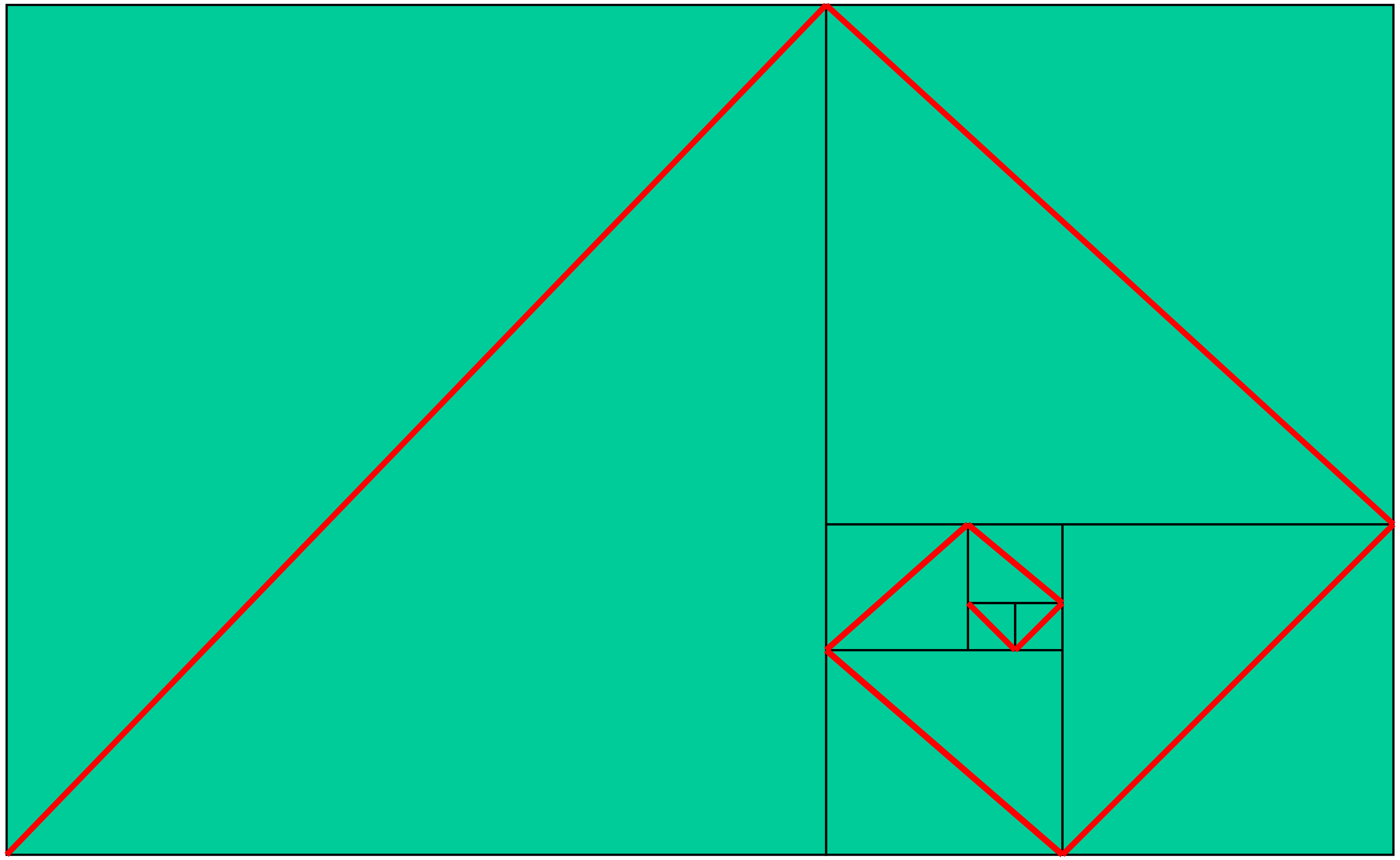
Indicando con f(n) l'n-esimo numero di Fibonacci in modo ricorsivo:

F(1)=1
F(2)=1
……
F(n) = F(n-1) + F(n-2)

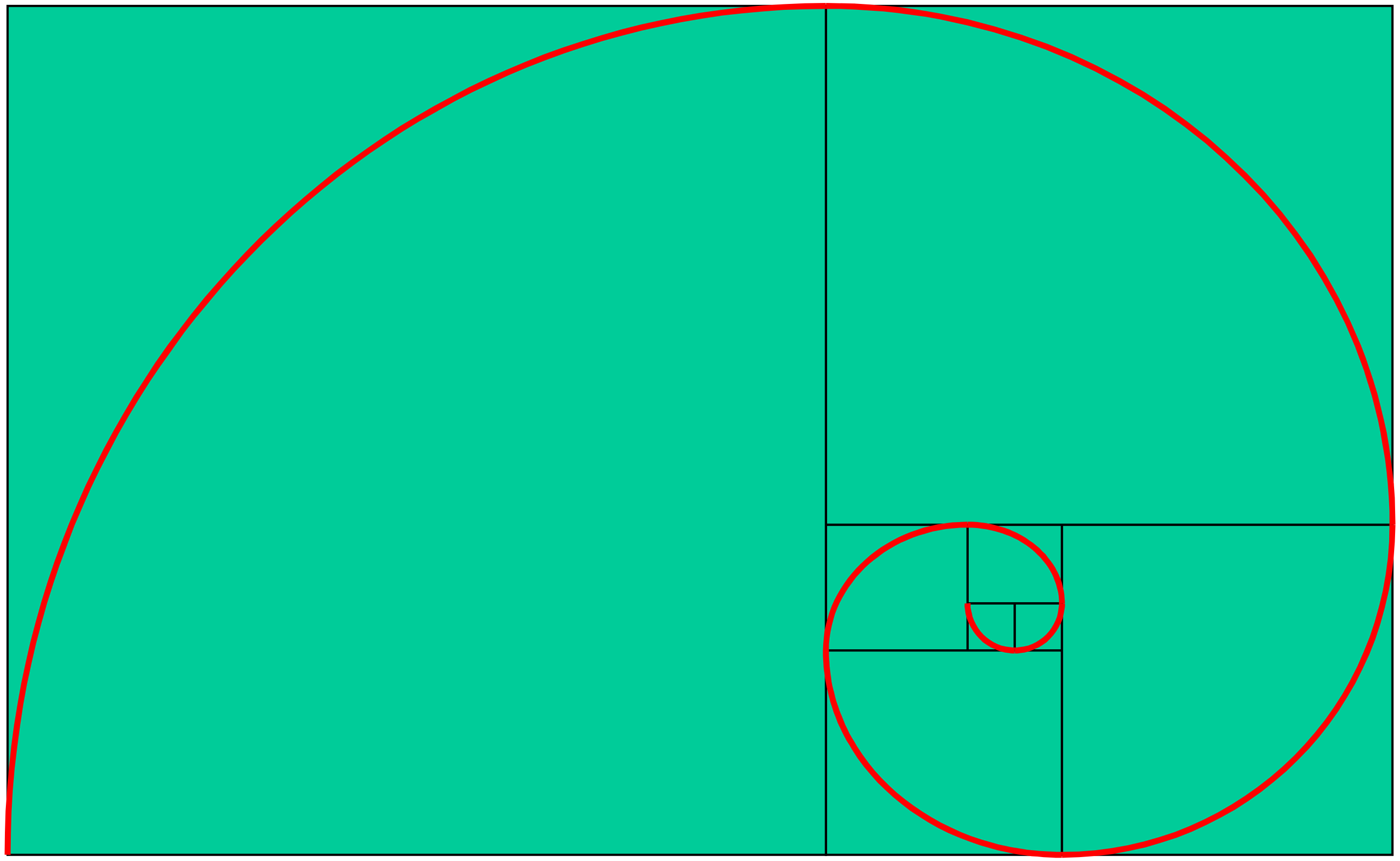
Notare che il termine n-esimo fa riferimento ai due precedenti

A questo punto si capisce che il successivo sarà: 8+13=21

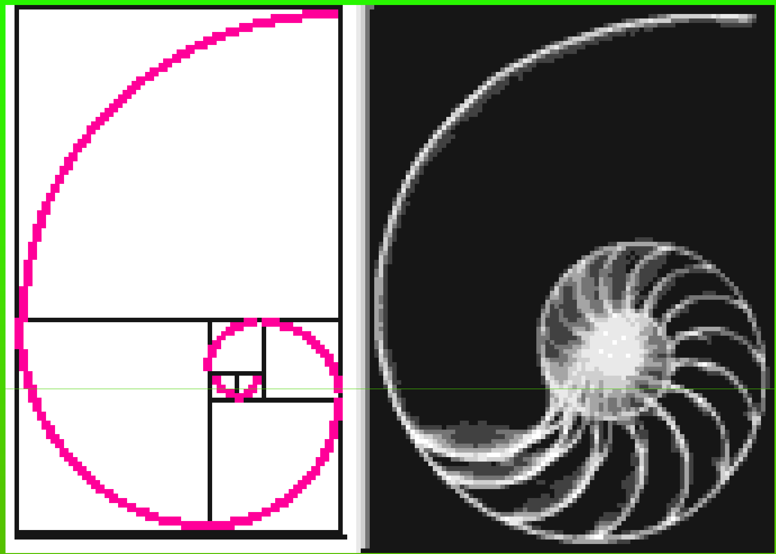
Geometria 1



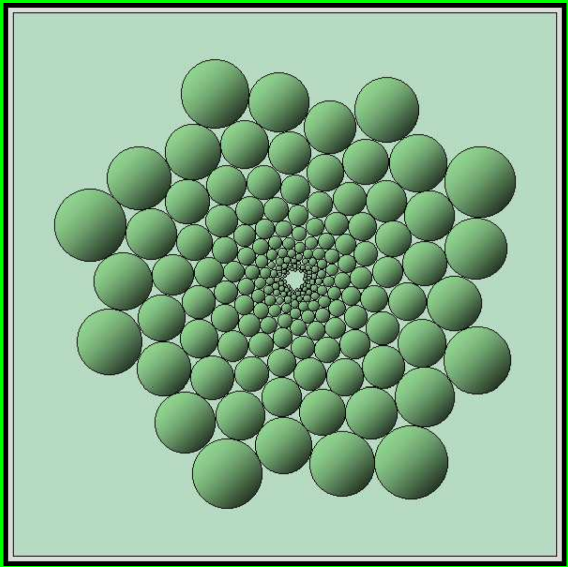
spirale



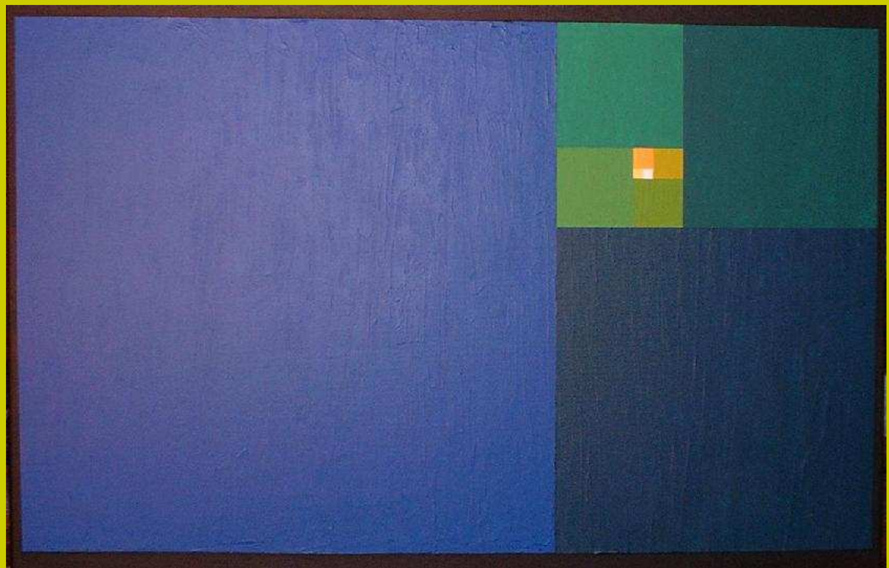
natura



Natura-2



Altro:



Ricorsione e frattali