

# Fisica al calcolatore: l'orbita di un pianeta

## Riassunto

*In questo articolo viene presentata la possibilità di calcolare e visualizzare l'orbita di un pianeta attorno alla sua stella utilizzando le potenzialità di un foglio elettronico. Dal punto di vista didattico l'attività proposta è molto istruttiva perché utilizza contemporaneamente conoscenze, abilità e competenze proprie della fisica, della matematica, dell'informatica e dell'astronomia. Inoltre essa permette di indagare con estrema facilità le conseguenze fisiche che si avrebbero se la legge di gravitazione universale fosse diversa da quella che conosciamo e si presta a diventare un metodo di indagine generale applicabile anche in altri contesti.*

**Roberto Fantini**

## Introduzione

Uno degli argomenti più affascinanti e importanti della meccanica è sicuramente la gravitazione universale. Essa riveste un ruolo chiave sia dal punto di vista concettuale che storico-filosofico. Concettualmente è il primo tentativo di unificazione delle leggi fisiche: quelle che descrivono il moto dei corpi terrestri con quelle riguardanti i corpi celesti. Inoltre essa è descrivibile da una forza centrale che dipende dall'inverso del quadrato della distanza, la stessa che regola l'interazione elettrostatica. Dal punto di vista storico-filosofico la teoria di Newton rappresenta il modello di riferimento per giustificare le leggi empiriche di Keplero e le tante osservazioni astronomiche culminate con Galileo, Huygens e lo stesso Keplero a sostegno dell'ipotesi cosmologica eliocentrica in sostituzione della precedente, millenaria, ipotesi tolemaica geocentrica.

## Aspetti teorici della gravitazione

La legge di gravitazione universale:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

proposta da Newton nel 1687 nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, descrive l'attrazione gravitazionale fra due masse puntiformi o sfere uniformi  $M$  e  $m$  poste a distanza  $r$ . A partire da essa non è difficile giustificare la seconda e la terza legge di Keplero.

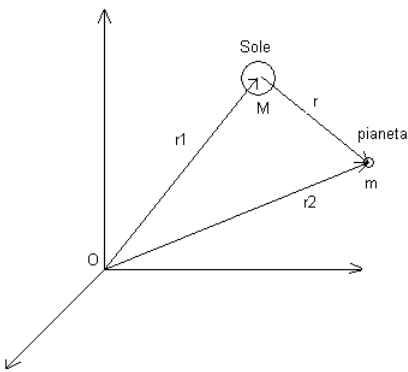
La seconda legge di Keplero che afferma che il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali, discende direttamente dalla conservazione del momento angolare del pianeta che a sua volta dipende dal fatto che la forza (1) è centrale e quindi il momento della forza  $\vec{r} \times \vec{F}$  è sempre nullo. Il moto del pianeta avviene pertanto nel piano perpendicolare al vettore momento angolare.

La terza legge di Keplero, la quale afferma che il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è costante per tutti i pianeti del sistema solare, è ottenibile nell'ipotesi di orbite circolari uguagliando il modulo della (1) con la forza centripeta  $F = m\omega^2 r$ .

Le difficoltà nascono quando si tenta di far discendere matematicamente dalla (1) la prima legge di Keplero che afferma che le orbite dei pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi. Nei libri di testo si dice solo che: "... si dimostra matematicamente che la traiettoria descritta dal pianeta può essere soltanto un'ellisse, una parabola o un'iperbole." (b1) ma non si dice come. E' infatti grazie all'analisi infinitesimale (non a caso inventata dallo stesso Newton e dal contemporaneo Leibniz) che si riescono a risolvere le equazioni del moto espresse dal sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \\ m \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \end{cases} \quad (2)$$

e ottenere effettivamente come soluzione per la traiettoria del pianeta una conica in coordinate polari (b2) e quindi anche un'ellisse nel caso particolare di un sistema legato gravitazionalmente. Qui  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  sono rispettivamente i vettori posizione dei corpi di massa  $M$  ed  $m$  rispetto all'origine di un sistema di riferimento inerziale;  $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$  è la distanza fra i corpi  $M$  ed  $m$  e  $\hat{r}$  è il vettore unitario (versore) che dal corpo di massa  $M$  punta al corpo di massa  $m$  (Fig. 1).



**Figura 1** I vettori posizione del Sole e di un pianeta rispetto un sistema di riferimento inerziale.

Per ottenere una soluzione del sistema (2) separiamo il moto del centro di massa,

$$\vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M + m} \quad (3)$$

dal moto relativo delle due masse.

Per prima cosa sommiamo membro a membro le equazioni (2) giungendo a:

$$M \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = 0 \quad (4)$$

che può essere riscritta nella forma più semplice e significativa:

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0 \quad (5)$$

Quest'ultima afferma che il centro di massa del sistema Sole- pianeta si muove di moto rettilineo uniforme poiché è isolato.

In secondo luogo se moltiplichiamo la prima equazione del sistema (2) per  $m$  e la seconda per  $M$  e sottraiamo membro a membro otteniamo l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (6)$$

nella variabile  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  che rappresenta la posizione relativa del pianeta rispetto al Sole (Fig. 1). Il parametro  $\mu$  è la massa ridotta del sistema e vale:

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} \quad (7)$$

Faremo l'ipotesi che  $M \gg m$  (per il sistema Sole-Terra si ha  $M/m \approx 333000$  e l'ipotesi è del tutto legittima) cosicché la (7) si riduce a:  $\mu = m$  e la (6) diventa:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (8)$$

Questo approccio è improponibile all'interno di un corso di studi liceale. Rimane però la possibilità di tentare di risolvere l'equazione del moto (8) in modo numerico, calcolando la soluzione in forma parametrica  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  per poi rappresentarla in un piano cartesiano. Questa strada può essere proposta anche come applicazione alla fisica di un nuovo metodo numerico di risoluzione di tante equazioni matematiche (la maggior parte per la verità) che non sono risolubili per via analitica ma solo in modo approssimato utilizzando per esempio i già ben noti metodi di bisezione, del punto unito, delle tangenti o grafico.

## Il metodo di approssimazione numerica

L'idea base del calcolo dell'orbita che qui illustro, riprende quella proposta da R. Feynman in una delle sue memorabili lezioni al Caltech Institute of Technology (b3) e da S. Chiodo (b4). Essa consiste nel suddividere il tempo in tanti intervalli  $\Delta t$  sufficientemente brevi da poter considerare, all'interno di questo lasso temporale, il moto del pianeta rettilineo uniformemente accelerato. Più l'intervallo di tempo sarà breve se confrontato con il periodo dell'orbita e più l'approssimazione del calcolo sarà accettabile. Una volta fatta la scelta per  $\Delta t$ , si procede passo passo calcolando ad ogni iterazione tutte le variabili cinematiche del moto. In particolare si dovranno determinare: la posizione del pianeta  $x$  e  $y$ , la sua distanza  $r$  dal Sole, la sua velocità  $v_x$  e  $v_y$  e l'accelerazione  $a_x$  e  $a_y$ . Dalla Figura 2 si può dedurre che la componente orizzontale della forza sta a tutta la forza gravitazionale come la distanza orizzontale  $x$  sta

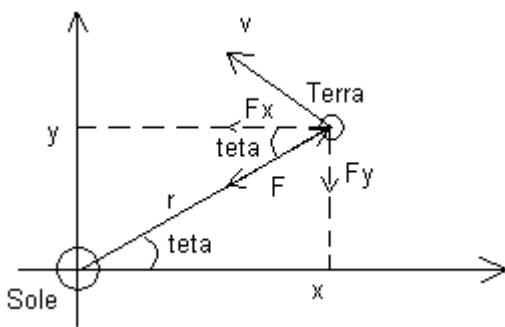
all'ipotenusa  $r$  poiché i due triangoli sono simili. Inoltre, se  $x$  è positivo  $F_x$  è negativa cioè:  $F_x/F = -x/r$ . Analogo discorso vale per la componente  $y$  della forza.

Ecco dunque le formule utilizzate (Fig. 2).

$$\begin{cases} a_x = -G \frac{M}{r^2} \frac{x}{r} \\ a_y = -G \frac{M}{r^2} \frac{y}{r} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} v_x = a_x \Delta t + v_{x0} \\ v_y = a_y \Delta t + v_{y0} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2 + v_{x0} \Delta t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2 + v_{y0} \Delta t + y_0 \end{cases} \quad (11) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (11')$$



**Figura 2** Il sistema di riferimento Sole-Terra in coordinate polari  $r-\vartheta$  con rappresentati i vettori forza e velocità.

### Passo zero

Il passo zero corrisponde al tempo zero ossia l'inizio del moto. La posizione  $x_0$ ,  $y_0$  e la velocità del pianeta  $v_{x0}$ ,  $v_{y0}$  sono dati del problema, le cosiddette condizioni iniziali o condizioni al contorno del problema di Cauchy (8).

Per la Terra sceglieremo i valori elencati in Tab. 1 che si riferiscono all'afelio della Terra e che sono comunemente riportati nei testi di astronomia (b5).

Dati astronomici iniziali
$x_0 = 1.52 \cdot 10^{11} \text{ m}$
$y_0 = 0$
$v_{x0} = 0$
$v_{y0} = 2.93 \cdot 10^4 \text{ m/s}$

**Tab. 1** Dati astronomici dell'orbita terrestre

Per l'accelerazione all'istante  $t = 0$  si avrà:

$$\begin{cases} a_{x0} = -G \frac{M}{r_0^2} \cdot \frac{x_0}{r_0} \\ a_{y0} = -G \frac{M}{r_0^2} \cdot \frac{y_0}{r_0} \end{cases} \quad (12)$$

### Passo uno

Al passo 1 corrispondente al tempo  $t_1 = \Delta t$ , le nuove variabili cinematiche  $x_1, y_1$  e  $v_{x1}, v_{y1}$  vengono calcolate con le (10) e (11) utilizzando come accelerazione  $a_x, a_y, x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}$  quelle calcolate al passo zero. Per la nuova accelerazione  $a_{x1}$  e  $a_{y1}$  si usano le (9) dove al posto di  $x, y$  ed  $r$  si usano le  $x_1, y_1$  ed  $r_1$  appena calcolate.

### Passo n-esimo

Al passo n-esimo corrispondente al tempo  $t_n = n \Delta t$ , le nuove variabili cinematiche  $x_n, y_n$  e  $v_{xn}, v_{yn}$  vengono calcolate con le (10) e (11) utilizzando come accelerazione  $a_{x(n-1)}$  e  $a_{y(n-1)}$  e come  $x_0, y_0, v_{x0}$  e  $v_{y0}$  quelle del passo (n-1)-esimo. Per la nuova accelerazione  $a_{xn}$  e  $a_{yn}$  si usano le (9) con al posto di  $x, y$  ed  $r$  le  $x_n, y_n$  ed  $r_n$  appena calcolate.

### **Il foglio di calcolo**

In questo paragrafo ci occuperemo della fase operativa, quella dedicata alla costruzione del foglio di calcolo vero e proprio. Essa prevede la compilazione di 8 colonne come riportato qui di seguito nelle Tab. 3 e 4.

Per comodità si è preferito esprimere le distanze in milioni di km (Giga metro - Gm), il tempo in giorni e le masse in masse terrestri. In queste nuove unità di misura la costante di gravitazione universale  $G$  diventa:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-27} (\text{Gm})^3 (3600 \cdot 24)^2 \text{ giorno}^{-2} (5.98 \cdot 10^{24}) M_T^{-1} = 2.98 \cdot 10^{-3} (\text{Gm})^3 \text{ giorno}^{-2} M_T^{-1}$$

In sintesi i parametri del moto orbitale sono:

$G = 2.98 \cdot 10^{-3} (\text{Gm})^3 \text{ giorno}^{-2} M_T^{-1}$
$M_{\text{Sole}} = 333000 M_T$
$GM_{\text{Sole}} = 992 (\text{Gm})^3 \text{ giorno}^{-2}$
$\Delta t = 0.1 \text{ giorno}$
$x_0 = 152 \text{ Gm (Afelio)}$
$y_0 = 0$
$v_{x0} = 0$
$v_{y0} = 2.53 \text{ Gm/giorno}$

**Tab. 2 Parametri del moto orbitale della Terra attorno al Sole espressi nelle nuove unità di misura.**

Le formule (9), (10), (11), e (11') per calcolare le variabili cinematiche sono riportate nelle tabelle Tab. 3 e 4 con i riferimenti assoluti alle celle contenenti i parametri del moto orbitale di Tab. 5.

	A	B	C	D
1	<b>t</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>r</b>
2	0	=\$K\$3	=\$K\$4	=RADQ(B2^2+C2^2)
3	=A2+\$K\$7	=0.5*G2*\$K\$7^2+E2*\$K\$7+B2	=0.5*H2*\$K\$7^2+F2*\$K\$7+C2	=RADQ(B3^2+C3^2)

**Tab. 3 Formule per il calcolo delle variabili cinematiche x, y e r dell'orbita**

	E	F	G	H
1	<b>vx</b>	<b>vy</b>	<b>ax</b>	<b>ay</b>
2	=\$K\$5	=\$K\$6	=\$K\$2*B2/(D2^(\$K\$10+1))	=\$K\$2*C2/(D2^(\$K\$10+1))
3	=G2*\$K\$7+E2	=H2*\$K\$7+F2	=\$K\$2*B3/(D3^(\$K\$10+1))	=\$K\$2*C3/(D3^(\$K\$10+1))

**Tab. 4 Formule per il calcolo delle variabili cinematiche vx, vy, ax, ay dell'orbita**

	J	K	L
1	<b>Dati iniziali orbita terrestre</b>		
2	<b>GM =</b>	992	(Gm) <sup>3</sup> giorno <sup>-2</sup>
3	<b>x0 =</b>	152	Gm
4	<b>y0 =</b>	0	
5	<b>vx0 =</b>	0	
6	<b>vy0 =</b>	2.53	(Gm/giorno)
7	<b>Delta_t =</b>	0.1	(giorno)
8	<b>M =</b>	333000	(Masse terrestri)
9	<b>G =</b>	0.00298	(Gm) <sup>3</sup> giorno <sup>-2</sup> M <sub>T</sub> <sup>-1</sup>
10	<b>Esponente</b>	2	(Esponente di r)

**Tab. 5 I valori dei parametri orbitali nel foglio di lavoro**

Con la funzione del riempimento automatico di Excel si seleziona la riga 3 e si trascina il quadratino nero in basso a destra per 3653 righe in modo tale da ottenere i valori cinematici per un anno sidereo intero che dura circa 365 giorni e 6 ore. Si vedano in proposito le Fig. 3 e 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>t</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>r</b>	<b>vx</b>	<b>vy</b>	<b>ax</b>	<b>ay</b>
2	0.0	152.0	0.0	152.0	0.000	2.530	-0.043	0.000
3	0.1	152.0	0.3	152.0	-0.004	2.530	-0.043	0.000
4	0.2	152.0	0.5	152.0	-0.009	2.530	-0.043	0.000
5	0.3	152.0	0.8	152.0	-0.013	2.530	-0.043	0.000
6	0.4	152.0	1.0	152.0	-0.017	2.530	-0.043	0.000

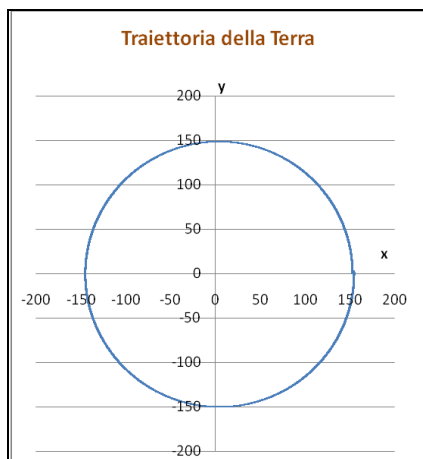
**Figura 3 Funzione "riempimento automatico"**

3644	364.2	153.6	-4.7	153.7	0.078	2.515	-0.042	0.001
3645	364.3	153.6	-4.4	153.7	0.074	2.515	-0.042	0.001
3646	364.4	153.6	-4.2	153.7	0.069	2.515	-0.042	0.001
3647	364.5	153.6	-3.9	153.7	0.065	2.515	-0.042	0.001
3648	364.6	153.6	-3.7	153.7	0.061	2.515	-0.042	0.001
3649	364.7	153.6	-3.4	153.7	0.057	2.515	-0.042	0.001
3650	364.8	153.6	-3.2	153.7	0.053	2.515	-0.042	0.001
3651	364.9	153.6	-2.9	153.7	0.048	2.515	-0.042	0.001
3652	365.0	153.7	-2.6	153.7	0.044	2.516	-0.042	0.001
3653	365.1	153.7	-2.4	153.7	0.040	2.516	-0.042	0.001
3654	365.2	153.7	-2.1	153.7	0.036	2.516	-0.042	0.001
3655	365.3	153.7	-1.9	153.7	0.032	2.516	-0.042	0.001

**Figura 4 Le ultime righe del foglio di calcolo**

## Risultati

- Il primo risultato che vogliamo ottenere è la rappresentazione grafica della forma dell'orbita. Per fare ciò è sufficiente selezionare le colonne contenenti le variabili  $x$  e  $y$  e riportarle in un grafico a dispersione. Ed ecco cosa si ottiene.



**Figura 5** La traiettoria della Terra attorno al Sole

La traiettoria è praticamente chiusa e di forma molto simile ad una circonferenza. Il motivo per cui non è perfettamente chiusa è imputabile alle incertezze introdotte dal calcolo numerico. Questo aspetto può essere accertato riducendo l'ampiezza dell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Che non sia poi una perfetta circonferenza lo si deduce dai valori numerici della colonna  $r$  che vanno da un massimo di 152 milioni di chilometri (afelio) ad un minimo di circa 147 milioni di chilometri (perielio) 6 mesi dopo. Ma è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi?

Per la scelta del sistema di riferimento, il Sole occupa il fuoco  $F_1(0; 0)$  dunque il fuoco  $F_2$  si trova nella posizione  $x = 152 - 147 = 5$  ossia  $F_2(5; 0)$ . Al foglio di calcolo aggiungiamo allora due colonne: la prima che calcoli la distanza  $PF_2$  e la seconda che sommi  $PF_1 + PF_2 = r + PF_2$ . Le formule sono riportate nella Tab. 6. Verifichiamo che durante il moto si abbia sempre:  $PF_1 + PF_2 = 2a = 299$ . Con la funzione di Excel del riempimento automatico si prende e trascina la riga 3 e colonne M ed N fino alla riga 3653.

	M	N
1	Verifica che l'orbita è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei 2 fuochi	
2	<b>PF2 F2 (5;0)</b>	<b>PF1+PF2</b>
3	=RADQ((B2-5)^2+C2^2)	=D2+M3
4	147	299
5	147	299
6	147	299
7	147	299

**Tab. 6** Verifica che la traiettoria della Terra è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Entro un'incertezza dell'1%, lungo tutta la traiettoria si ha proprio  $PF_1 + PF_2 = 299$  per cui possiamo concludere che l'orbita della Terra attorno al Sole è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

E' anche possibile calcolare l'eccentricità dell'orbita della Terra. La distanza focale  $2c = (152-147) = 5$  e l'asse maggiore  $2a = (152+147) = 299$  forniscono per l'eccentricità  $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{5}{299} = 0.0167$  identica al valore comunemente accettato.

- Un secondo risultato che si può ricavare da questo foglio di calcolo è la forma dell'orbita della Terra nel caso la forza di gravità non dipendesse dall'inverso del quadrato della distanza ma da una potenza diversa. Facciamo due esempi. Nel primo caso prendiamo un esponente leggermente maggiore di 2, diciamo 2.2 e nel secondo uno leggermente minore, per esempio 1.8. I risultati che si ottengono sono sconcertanti! Se la dipendenza funzionale della forza dalla distanza fosse del tipo  $1/r^{2.2}$  essa risulterebbe troppo debole per trattenere la Terra in un'orbita limitata e il nostro pianeta si perderebbe nello spazio (Fig. 6). Nel caso invece di una dipendenza del tipo  $1/r^{1.8}$ , la forza darebbe luogo a traiettorie ancora limitate, ma non chiuse e molto più eccentriche con pericolosi passaggi vicinissimi al Sole (Fig. 7).

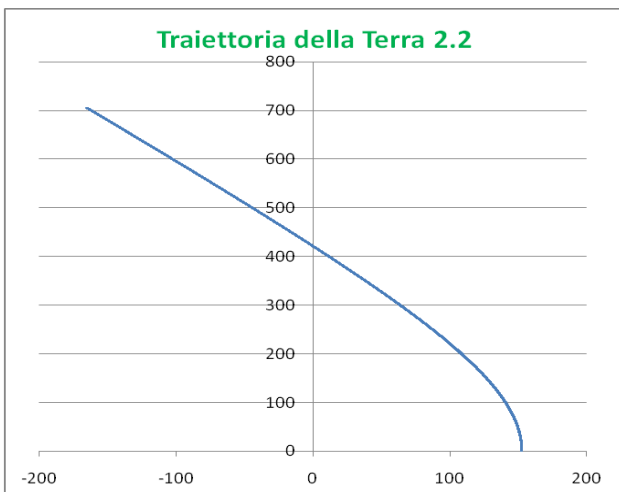


Figura 6 Traiettoria della Terra se  $F \propto 1/r^{2.2}$

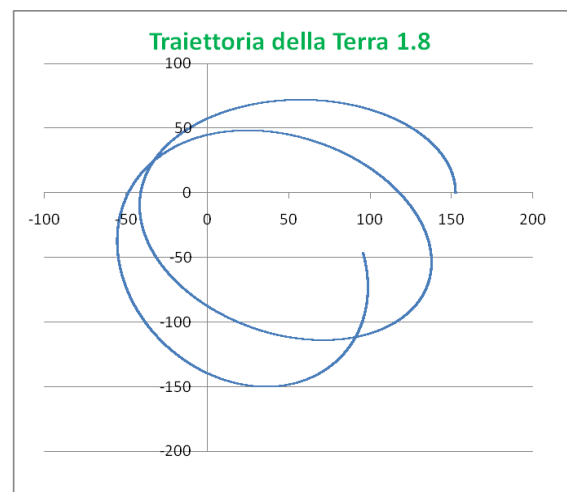


Figura 7 Traiettoria della Terra se  $F \propto 1/r^{1.8}$

- Da ultimo è interessante studiare l'aspetto energetico del moto. Sappiamo che la forza di gravità è conservativa e quindi l'energia meccanica totale del sistema è costante. Per verificarlo possiamo aggiungere una nuova colonna che calcoli proprio il valore di:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (13)$$

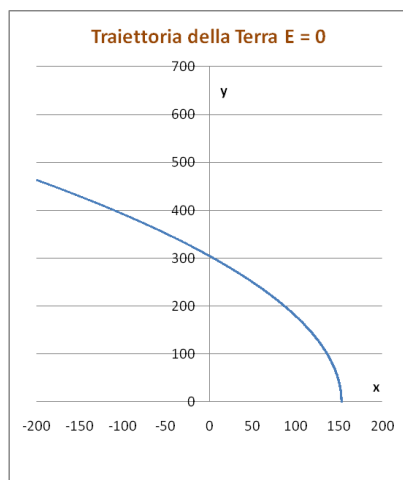
( $m = 1$ ). Si constaterà che durante tutto il moto  $E$  risulta pressoché costante. Anche in questo caso le piccole variazioni entro l'1% sono dovute alle incertezze del metodo numerico. Cambiando la velocità  $v_{y0}$  si modifica l'energia cinetica della Terra. Quale sarà l'effetto sulla forma della sua traiettoria? Newton ci garantisce che essa rimarrà ancora una conica: ma quale? Dalla teoria si deduce che il tipo di conica dipende dall'energia totale del sistema secondo lo schema seguente:

Energia totale del sistema = $K + U$	Forma dell'orbita
$E < 0$	Ellisse
$E = 0$	Parabola
$E > 0$	Iperbole

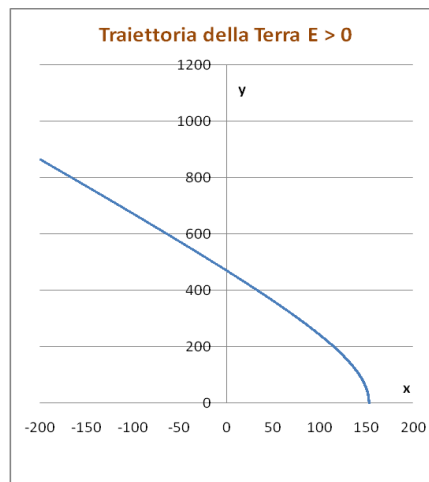
**Tab. 7** Dipendenza della forma dell'orbita dall'energia meccanica totale del sistema.

Per verificarlo modifichiamo la velocità  $v_{y0}$ . Finché  $E < 0$  l'orbita è chiusa e di forma ellittica.

Quando  $E = 0$  otteniamo una traiettoria aperta di forma parabolica (Fig. 8) e, infine, se  $E > 0$  una traiettoria iperbolica (Fig. 9). Anche in questo caso, con opportuni calcoli, si potrebbe verificarlo.



**Figura 8** Forma parabolica dell'orbita se  $E=0$



**Figura 9** Forma iperbolica dell'orbita se  $E > 0$

## Conclusioni

Questo lavoro propone un approccio alternativo e multidisciplinare alla fisica. Le attività di laboratorio sono essenziali e assolutamente formative per lo sviluppo di un metodo scientifico rigoroso, ma spesso sono limitate dalle risorse disponibili. Le conoscenze teoriche sono altrettanto importanti perché permettono di interpretare i risultati sperimentali all'interno di un unico quadro di poche leggi matematiche ma, talvolta, così complicate da non poter essere risolte o approfondite adeguatamente. La risoluzione numerica delle equazioni della fisica costituisce una terza via di conoscenza dei fenomeni, capace da un lato di sopperire alla mancanza di mezzi d'indagine scientifica e, dall'altro, di superare difficoltà matematiche all'apparenza insormontabili.

### Bibliografia e sitografia

- b1: "La fisica di Amaldi: idee ed esperimenti". U. Amaldi. Zanichelli
- b2: "La fisica di Berkeley 1". Kittel, Knight, Ruderman. Zanichelli
- b3: "La fisica di Feynman 1". R. Zeynman. Zanichelli
- b4: "Informatica per la scuola". Sergio Chiodo. McGraw-Hill
- b5: <http://it.wikipedia.org/wiki/Terra>